

سلسلة مذكرات

الإبداع

في الرياضيات

الصف الأول الثانوي
الفصل الدراسي الأول

إعداد /

أ/ جميل غالي السيد

مكتبة وسيم

ش.م.م. شارع حسني مبارك خلف الثانوية بنات

01004423597.3943035

مقرعة

كلمة الطمّوح تعني إبداع العقل ووصوله إلى مدارك الفهم والذكاء،

وكلمة **الإبراهيم** تعني العيش على القمة وإستنشاق عزة العالی لأنه يرجو دائما

المعالي لا يقنع بغيره ولا يرضى إلا القمة المستحقة عن جدارة ،،،،،

فَارْجُو مِنَ اللَّهِ أَنْ أَكُونَ قَدِمْتَ مَا عَلَى مِنْ خَلَّوْهُ هَذَا الْعَمَلِ الْمَتَوَاضِعِ بَيْنَ أَيْدِيكُمْ

وَاللّٰهُ اَدْعُوا اَنْ يُّوَفِّقَكُمْ اِلٰى مَا نَآمِلُوْنَهُ اَنْتُمْ وَوَالِدِيْكُمْ

مع أرق الأمنيات بالنجاح والتميز،،

۱/ جمیل غالی السید

❖ كيف نذاكر مادة الرياضيات:

- نحفظ قوانين الدرس جيدا " بالورقة والقلم "
- نذاكر الأمثلة المحلولة جيدا " بالورقة والقلم "
- نحيد حل الأمثلة المحلولة مرة أخرى دون النظر إلى الإجابة
- نقوم بحل تمارين متنوعة على الدرس

الإلهام

في الرياضيات

أولاً:

الحبر

الوحدة الأولى

الجبر والعلاقات والدوال

- (١) حل معادلات الدرجة الثانية في متغير واحد
- (٢) مقدمة عن الأعداد المركبة
- (٣) تحديد نوع جذري المعادلة التربيعية
- (٤) العلاقة بين جذري المعادلة التربيعية ومعاملات حدودها
- (٥) تكوين المعادلة التربيعية من علم جذراها
- (٦) إشارة الدالة
- (٧) متباينة الدرجة الثانية في مجهول واحد

تمارين عامة علي الوحدة
اختبار تراكمي

(١) حل معادلة الدرجة الثانية في مجهول واحد

نعلم أنه :

- * المعادلة $P = ax^2 + bx + c = 0$ حيث $a \neq 0$ ، $b \in \mathbb{R}$ ، $c \in \mathbb{R}$ هي معادلة من الدرجة الثانية في مجهول واحد في \mathbb{R} . وهذه المعادلة لها حلان " جذران " على الأكثر .
- * جذرا المعادلة " مجموعة حل المعادلة " هو كل عدد حقيقي يحققها .

أولاً : حل معادلة الدرجة الثانية جبرياً :

(١) باستخدام التقليل (٢) باستخدام القانون العام

مثال ١ :- أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :-

- (١) $x^2 - 5x = 0$
- (٢) $x^2 - 3x - 17 = 0$
- (٣) $x^2 - 5x - 6 = 0$
- (٤) $x^2 - 9 = 0$
- (٥) $x^2 - 6x + 9 = 0$
- (٦) $x^2 + 5x - 6 = 0$
- (٧) $x = \frac{5}{2} + \frac{3}{2}$

الحل :-

$$(١) \quad x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow x(x - 5) = 0$$

$$\begin{array}{l} \text{إما } x = 0 \\ \text{أو } x - 5 = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} x = 0 \\ x = 5 \end{array}$$

$$\therefore \text{ج. ٢} = \{0, 5\}$$

$$(١) \quad x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow x(x - 5) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{أو} \quad x = 5$$

$$\text{ج. ٢} = \{0, 5\}$$

$$(٣) \quad x^2 - 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

$$\therefore \text{ج. ٣} = \{3\}$$

مكتبة وسام
شوين - شارع حسني مبارك - خلف الثانوية بنات
01004423597.3943035

$$\begin{array}{r} 1 \\ \times 3 \\ \hline 3 \\ 7 \\ \hline 10 \end{array}$$

(18)

"تحلل بالحقص" $0 = 3x^2 - 17x + 6$

$$0 = (3x - 1)(x - 6)$$

$$\begin{array}{l} 0 = 3x - 1 \quad \text{أو} \quad 0 = x - 6 \\ 3x = 1 \quad \text{أو} \quad x = 6 \\ x = \frac{1}{3} \quad \text{أو} \quad x = 6 \end{array}$$

\therefore ج. 1 $\frac{1}{3}$ و 6

"خروج به سطر بعينه" $0 = 9 - 3x$

$$0 = (3 - x)(3 + x) \quad \Leftrightarrow \quad 3 = x \quad \text{أو} \quad 3 = -x$$

\therefore ج. 3 و -3

"تحلل بالقانون العام" $0 = x^2 + 5x - 6$

حيث P معامل x ، B معامل x ، ج الحد المطلق
لا بد أن تكون المعادلة في الصورة $Px^2 + Bx + J = 0$

$$\Delta = B^2 - 4PJ$$

$$\begin{array}{l} 0 = P \\ C = B \\ J = -6 \\ \Delta = 25 \\ \Delta = 25 \end{array} \quad \left| \quad \frac{\sqrt{\Delta} \pm B}{2P} = \frac{\sqrt{25} \pm 5}{2 \times 1} = \frac{5 \pm 5}{2} = \frac{10}{2} = 5 \quad \text{أو} \quad \frac{0}{2} = 0$$

\therefore ج. 5 و 0

(17) $x = \frac{0}{5} + 5 = 5$ \Leftrightarrow $5x = 0 + 5 = 5 \Leftrightarrow 5 = 5 - 5x = 0 + 5 - 5x$

$$\begin{array}{l} 1 = P \\ J = -6 \\ 0 = J \end{array} \quad \left| \quad \frac{\sqrt{\Delta} \pm B}{2P} = \frac{\sqrt{0 - 16} \pm 4}{2 \times 1} = \frac{-4 \pm 4}{2} = \frac{0}{2} = 0 \quad \text{أو} \quad \frac{-8}{2} = -4$$

\therefore لا يوجد حل للمعادلة

$\Delta \neq 0$

\therefore ج. 5 و -5

* * * * * * *
* * * * * * *
* * * * * * *

$$(٤) \quad ٥س - ١٤ = ٨ + ٥$$

$$(١) \quad ٣س + ٥ = ٥$$

$$(٥) \quad ٥س - ١ = ٥$$

$$(٢) \quad ٥س - ٤ = ٣ + ٥$$

$$(٦) \quad ٥س + ٥س - ٥ = ٥$$

$$(٣) \quad ٥س + ٥س + ٤ = ٥$$

مثال ٥ :- أطلقت قذيفة رأسياً لأعلى بسرعة ١٩,٦ م/ث. ١٠ أصب
الفترة الزمنية t بالثانية التي تستغرقها حتى تصل إلى ارتفاع h متراً
حيث h كساوى ٧,١٤ م علماً بأنه العلاقة بين h و t هي $h = ٤,٩t - ٤,٩t^٢$
الكل :-

$$٧,١٤ = ٤,٩t - ٤,٩t^٢ \quad ٧,١٤ = ٤,٩t \quad ١٩,٦ = ٤,٩t$$

$$٧,١٤ = ٤,٩t - ٤,٩t^٢ \quad ٧,١٤ = ٤,٩t - ٤,٩(٤,٩) \quad ٣ = ٤,٩ - ٤,٩$$

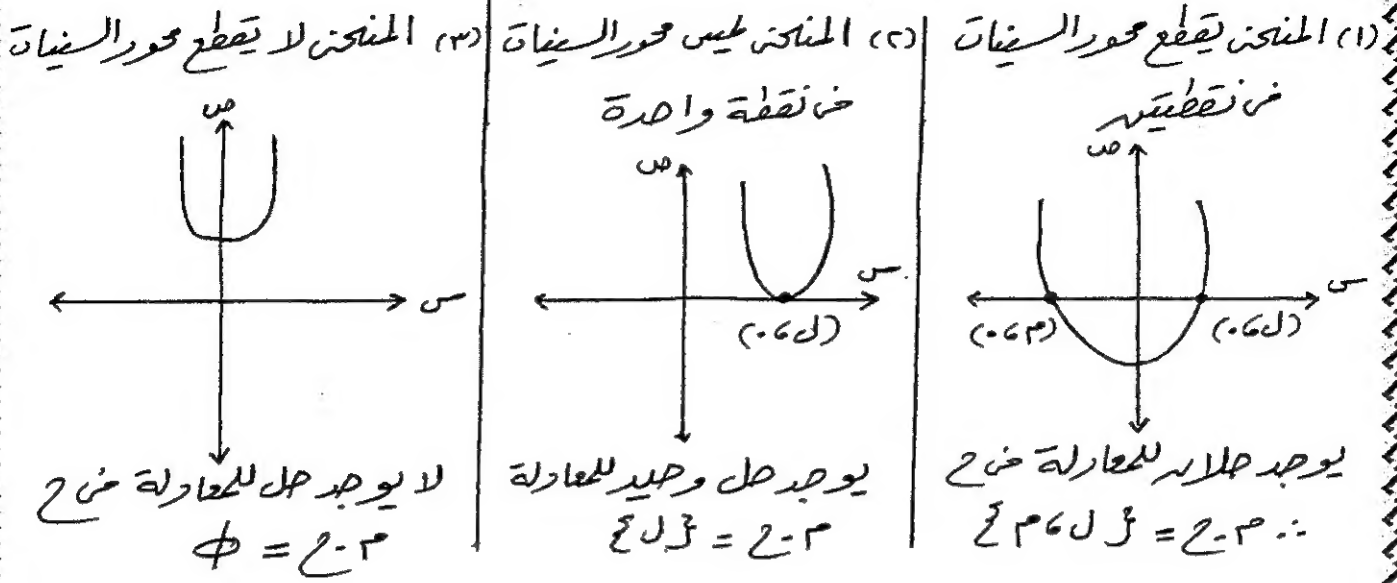
$$٣ = ٤,٩ - ٤,٩ \quad ٣ = ٤,٩ - ٤,٩ \quad ٣ = ٤,٩ - ٤,٩$$

أي أنه :- القذيفة تصل إلى ارتفاع ٧,١٤ م بعد t ثم تستمر في الحركة لأعلى حتى
تصل إلى أقصى ارتفاع ثم تتحرك للأسفل وتعود لنفس الارتفاع بعد ٣ ث.

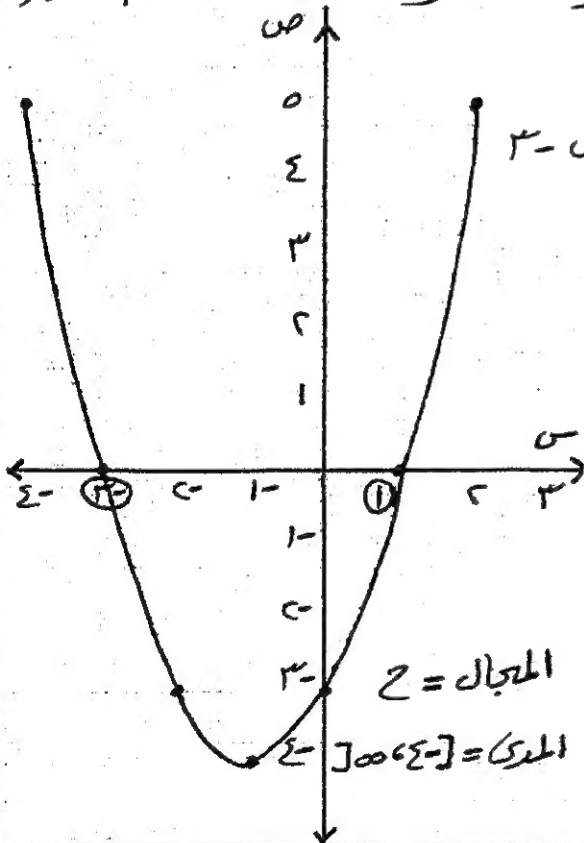
ثانياً : حل معادلة الدرجة الثانية بيانياً :-

لك المعادلة $٣س + ٥س + ٥ = ٥$ بيانياً نرسم ضمن الدالة $٣س + ٥س + ٥ = ٥$
ثم نهيئ مجموعة الإحداثيات السينية لنقط تقاطع المنحنى مع محور السينات
فتكون هي مجموعة الحل.

① وتوجد ثلاث حالات :-



مثال ١٤ :- حل المعادلة $s^2 + s - 3 = 0$ بيانياً من الفترة $[-6, 3]$ ثم تحقق من صحة الحل جبرياً .



s	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
(s)	3	0	-3	-4	-3	0	3	6	9	12

ومن الرسم نجد أنه $3 = 2 = 1$

الآن نتحقق من صحة الحل جبرياً :-

$$s^2 + s - 3 = 0 \iff (s-2)(s+3) = 0$$

$$s = 2 \text{ أو } s = -3$$

$$\therefore 3 = 2 = 1$$

② وعليه نتحقق من صحة الحل أيضاً بالتعويض بالمجموعة الحل من المعادلة فنجد أنه صحيح .

هـ "ملحوظة هامة" :- من حالة عدم إعطاء تلك فترة للتحميل يمكننا الحل بإيجاد نقطة رأس المنحنى وهى $(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a})$ ثم نوجد عدة نقاط على المنحنى ونربطها

تمارين على حل معادلة الدرجة الثانية من مجهول واحد

II اختر الإجابة الصحيحة :-

- ① المعادلة $(x-1)(x+2)=0$ من الدرجة [الأولى ، الثانية ، الثالثة ، الرابعة]
- ② جذر المعادلة $x^2 - 5x + 3 = 0$ هما [$\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ ، $\frac{1}{2}, \frac{5}{2}$ ، $\frac{3}{2}, \frac{5}{2}$ ، $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$]
- ③ مجموعة حل المعادلة $x^2 + 2 = 0$ فى ح هـ [$3-2$ ، $3-3$ ، $3-3$ ، $3-3$]
- ④ إذا كان $x=2$ جذراً للمعادلة $x^2 + mx + 3 = 0$ فما قيمة m [1 ، 2 ، 3 ، 4]
- ⑤ مجموعة حل المعادلة $x^2 = x$ هـ [3 ، 3 ، 3 ، 3]
- ⑥ إذا قطع منحنى الدالة التربيعية محور السينات من نقطتين فإنه عدد حلول المعادلة هو [صفر ، 1 ، 2 ، عدد لا نهائى]

III أوجد مجموعة حل كل معادلة من المعادلات الآتية :-

- (1) $x^2 - 5x + 6 = 0$ (2) $x^2 - 2x = 0$ (3) $x(x+1)(x-1) = 0$
- (4) $x^2 + 3x = 0$ (5) $x^2 + 9 = 0$ (6) $x^2 - 5x + 1 = 0$

IV حل كل معادلة من المعادلات الآتية من خلال القانون العام :-

- (1) $x^2 - 6x + 7 = 0$ (2) $x^2 + 6x + 8 = 0$ (3) $x^2 - 3x - 1 = 0$
- (4) $x^2 + 2x - 8 = 0$ (5) $x^2 - 3x - 6 = 0$ (6) $x^2 - 5x - 2 = 0$

V أوجد مجموعة حل المعادلة $x^2 - 5x + 6 = 0$ بيانياً من الفترة $[2, 6]$

VI أوجد قيمة كل من p و b إذا كان $3-6$ هما جذرا المعادلة $x^2 + px + b = 0$

(٢) مقدمة عن الأعداد المركبة

تمهيد :- سنبصر أنه درسنا نظام الأعداد الطبيعية (عد) ونظام الأعداد الطبيعية (ط) ونظام الأعداد النسبية (ص) ونظام الأعداد الحقيقية (ح) وعلمنا أنه أي نظام نشأ لتوسيع للنظام الذي يسبقه لحل معادلات جديدة لم تملكه معالجة للحل من النظام السابق.

مثلاً: المعادلة $x + 1 = 0$ $\Leftrightarrow x = -1$ (ليس لها حل من ح)

لذا كانه التفكير في نظام جديد للأعداد عليه حل هذا النوع من المعادلات ويكونه توسيع لنظام الأعداد الحقيقية (ح).

العدد التخيلي (ق) :-

كل المعادلة السابقة سنفرص عدد i $i^2 = -1$ يحقق المعادلة $x^2 + 1 = 0$ وسنرمز لهذا العدد بالرمز (ق) أي أنه "العدد التخيلي" هو العدد الذي مربعه -1 وبالرمز $i = -1$

وعلى هذا فإنه عليه حل المعادلة $x^2 + 1 = 0$ كالغالي :-

$$x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1 \Leftrightarrow x = \pm i$$

$$x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1 \Leftrightarrow x = \pm i$$

وبذلك نوجد مجموعة جديدة من الأعداد تسمى مجموعة الأعداد العقلية.

مثال ① أوجد مجموعة حل المعادلة $x^2 + 17 = 0$.

$$x^2 + 17 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -17 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{-17} = \pm i\sqrt{17}$$

$$x = \pm i\sqrt{17}$$

$$x = \pm i\sqrt{17}$$

* خلاصة الكلام * لايجاد $ت^N$ حيث $٥N$ من تقسيم ٥ على ٤

فيكون $ت^N =$ أحد من القيم كما بالجدول .

٣	٢	١	٠	باقي القسمة
٢	١	٢	١	القيمة

* * ترتيب * القسمة أبسط صورة :-

* * $١١ + ٨٤$ ٩ ١٩ ٤٨ ١٥ ٤ ٢٤ ٤ ٢٤ ١١

العدد المركب :-

لايجاد حل المعادلة $س^٢ - ٥س + ٢٠ = ٠$ بالقانون العام نجد أن :-

$$س = \frac{-(-٥) \pm \sqrt{(-٥)^2 - 4(1)(20)}}{2(1)} = \frac{٥ \pm \sqrt{٢٥ - ٨٠}}{٢} = \frac{٥ \pm \sqrt{-٥٥}}{٢}$$

$$س = \frac{٥ \pm \sqrt{-٥٥}}{٢} = \frac{٥ \pm \sqrt{٥٥}i}{٢}$$

أي أن :- المعادلة لها جذران هما $٣ + ٤٤$ و $٣ - ٤٤$ ولكننا لا نختصيهما بأي مجموعة الأعداد الحقيقية \Rightarrow ليس كل منه $٣ + ٤٤$ و $٣ - ٤٤$ "عددًا حقيقيًا"

أي أن :- العدد المركب هو العدد الذي يمكن وضعه على الصورة $س = ب + بي$ وسيمر $ب$ بالجذر الحقيقي و $بي$ بالجذر التخيلي .

أصله لأعداد مركبة :- $٢ - ٢$ $٦ + ٧$ $١٢ + ١٢$ $٥ - ٥$ $٤ + ٤$ $٦ + ٦$ $٤ - ٤$

من ملاحظات :-

(١) إذا كان $س = ب + بي$ وكان $ب = ٠$ فإنه $س = ب$ ويكون $س$ "حقيقيًا صفرًا" .

(٢) إذا كان $س = ب + بي$ وكان $ب = ٠$ فإنه $س = بي$ ويكون $س$ "تخيليًا صفرًا" .

(٣) أي عدد حقيقي هو عدد مركب جزئيه التخيلي = صفر .

(٤) أي عدد تخيلي هو عدد مركب جزئيه الحقيقي = صفر .

كساي عددية مركبة :-

يتساوى العدد المركبة إذا وقطع إذا تساوى الجزاء الحقيقية وتساوى الجزاء التخيلية .

أي أنه :- إذا كان $P + bT = s + pT$ فإن $p = P$ و $s = b$
 الجزء الحقيقي = الجزء الحقيقي \Rightarrow الجزء التخيلي = الجزء التخيلي "والعكس صحيح"
 ← "خاصية" إذا كان $P + bT = 0$ $\Leftrightarrow p = P$ صفر (موجة) $b = b$ صفر

مثال ⑤ :- أوجد قيمتي s و b إذا كان :-

$$(1) \quad s - 3b = 5 + (2 + 7i)T$$

$$(2) \quad s + bT = 5 - 2i$$

الحل :-

(1) :- العدد المركب متساويان \Leftrightarrow الحقيقي = الحقيقي \Rightarrow التخيلي = التخيلي

$$s - 3b = 5 \quad \Leftrightarrow \quad s - 3b = 5$$

$$5 = s + 2b \quad (2 \times) \quad 10 = s + 4b$$

$$1 = b \quad (7 \div) \quad \boxed{b = 1}$$

بالقوة من المعادلة الأولى عند $s = 3 \Leftrightarrow 3 = s - 3b = 5 - 3b \Leftrightarrow 3 = 5 - 3b$

$$\boxed{s = 1} \quad (3 \div)$$

(2) :- العدد المركب = صفر \Leftrightarrow الحقيقي = صفر \Rightarrow التخيلي = صفر

$$s + bT = 5 - 2i = 0 \Leftrightarrow s + bT = 5 - 2i \Rightarrow s = 5 - 2b$$

$$5 = s \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{s = 5} \quad \Leftrightarrow \quad 5 = 5 - 2b \Rightarrow \boxed{b = 0}$$

* تدوين * أو جد قيم x من إذا كان :-

$$(1) (x-5)(x+5) + (x+5)(x-5) = 0$$

$$(2) = 5x + x^2 - 25 + x^2 - 5x + 5x - 25 = 0$$

العمليات على الأعداد المركبة :-

- يمكن استخدام خواص الأبدال والجمع والتوزيع عند جمع أو ضرب الأعداد المركبة .
- عند جمع أو طرح عددين مركبين نجمع أو نطرح الأجزاء الحقيقية معًا والأجزاء التخيلية معًا .

مثال ② :- أوجد ناتج ما يأتي من أبسط صورة :-

$$(5) (3-2i)(3+2i)$$

$$(11) (7+3i) + (9-i)$$

$$(6) (1-i)^2$$

$$(9) (4-i) - (5-i)$$

$$(7) (1-i)^3$$

$$(3) (2+3i)(5-i)$$

$$(8) (3+i)^2$$

الحل :-

$$(1) (7+3i) + (9-i) = 16 + 2i$$

$$(9) (4-i) - (5-i) = 4-i-5+i = -1$$

$$(3) (2+3i)(5-i) = 10 - 2i + 15i - 3i^2 = 10 - 2i + 15i + 3 = 13 + 13i$$

$$(4) (3+i)^2 = 9 + 6i + i^2 = 9 + 6i - 1 = 8 + 6i$$

$$(8) (3+i)^2 = 9 + 6i + i^2 = 9 + 6i - 1 = 8 + 6i$$

$$(11) (7+3i) + (9-i) = 16 + 2i$$

$$(5) (3-2i)(3+2i) = 9 - 6i + 6i - 4i^2 = 9 - 4(-1) = 9 + 4 = 13$$

$$= 13$$

"خد بالله"

$$(b+p)^2 = b^2 + 2bp + p^2$$

$$(b-p)^2 = b^2 - 2bp + p^2$$

"فرصة جيدة مرعبة"

$$\cdot \mathcal{L} = \mathcal{L} \varepsilon =$$

$$\underline{17} = \sum_{i=1}^n i = (n) = \left(\frac{n}{2} + n + 1 \right) = (n+1) = \underline{(n+1)} \quad \underline{(v)}$$

* * سَدِيبٌ * أَوْ جَدْنَانِجٍ مَا يَأْتِي مِنَ الْبَسْطِ صَوْرَةٌ :-

$$(\bar{u}_c - 0)(\bar{u}_c + 0) \quad (2) \quad (\bar{u}_{\Sigma - c}) + (\bar{u} + 0 -) \quad (1)^* \quad *$$

$$^2(\bar{u}+1) \quad (0) \quad (\bar{u}+3-)(\bar{u}-1) \quad (1)$$

$$^7(\bar{u}+r) \quad (7) \qquad ^9(\bar{u}-r) \quad (9)$$

مثال ٥ :- أوجد \sin و \cos للقيمة الحقيقية المعادلة

$$9 - (\bar{v} - u)(\bar{v} + u) = \bar{v}v$$

$$9 - (\bar{u} - u)(\bar{u} + u) = \bar{u}^2 - u^2 \quad \therefore \underline{\text{الخاتمة}}$$

$$\therefore 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \therefore 9 - \frac{1}{2} = \frac{17}{2} = 8\frac{1}{2}$$

$$9 - 3 + \bar{v}v = \bar{v}v^3 + v^3v = \bar{v}v \therefore$$

$$\vec{v} \cdot (\vec{v} - v\vec{u}) + (9 - 3 + v\vec{u}) = \vec{v} \cdot \vec{v} \therefore$$

عدداته مركباً حقيقياً و $\sqrt{-1}$ الحقيقى = الحقيقى ، التخيل = التخيل

$$\textcircled{1} \leftarrow \therefore 7 - 0.005 \leq \therefore = 9 - 2 + 0.005 \therefore$$

$$\in \longleftarrow V \cup \mathcal{P} = \mathcal{U} \Longleftarrow V = \mathcal{U} \cup \mathcal{P} \therefore$$

• = 7 - 40V - 40^3 \Leftrightarrow • = 7 - 40(V - 40^3) \Leftrightarrow ①

$$= (r - \omega)(c + \omega r)$$

$$\mu = \omega \Leftarrow \cdot = \mu - \omega \quad | \quad \cdot = c + \omega \mu$$

$C = 5 \leftarrow$ غن $\frac{C}{F} = 5 \leftarrow$ غن
 $9 = 5 \leftarrow$ غن

غنی ۵ کے س = 9 -

$$* * * * * \text{تدريب} * * * * * \text{أوجد من } (x) \text{ القيمة الحقيقية المعادلة :-}$$

$$1 + (x + 3)(x + 5) = 1$$

العدداه المترافقا :-

العدداه $P + B$ و $P - B$ مترافقان إذا لم يسبقا عدداه مترافقا
مثلا لاحظ أنه :- العدد المركب ومرافقه لا يختلفا إلى غير إشارة الجزئ التخيل منها

مثال :- العدد $3 + 2i$ مرافقه $3 - 2i$
العدد $5 - i$ مرافقه $5 + i$
العدد $4i$ مرافقه $-4i$ "لاحظ أنه الجزئ الحقيقي = صفر"

⊗ بعض خواص العدداه المترافقا :-

(1) مجموع العددين المترافقين هو عدد حقيقي حيث $P + B + (P - B) = 2P$
مثال $2 = (3 + 2i) + (3 - 2i)$

(2) حاصل ضرب العددين المترافقين هو عدد حقيقي حيث $P + B \cdot (P - B) = P^2 + B^2$
مثال $13 = 9 + 4 = (3 + 2i)(3 - 2i)$

(3) يمكن إجراء عملية قسمة عدد مركب على آخر مركب بضرب كل منها في العدد المرافق للمقام لجعل المقام عددا حقيقيا .

مثال :- ضاع العدد $\frac{10}{3 + 2i}$ على الصورة $P + Bi$

الحل :- بالضرب ببطا ومقاما في $3 - 2i$

$$3 - 2i = \frac{(3 - 2i) \cdot 10}{(3 + 2i)(3 - 2i)} = \frac{(3 - 2i) \cdot 10}{9 - 4i^2} = \frac{3 - 2i}{5} \times \frac{10}{3 + 2i} = \frac{10}{3 + 2i}$$

$$* * * * * \text{تدريب} * * * * * \text{ضع العدد } \frac{5}{3 - 2i} \text{ في الصورة } P + Bi .$$

$$\frac{50 + 14}{50 - 0} \quad (1)$$

$$\frac{(\sqrt{c}-1)(\sqrt{c}+c)}{(\sqrt{c}-3)(\sqrt{c}+1)}$$

(1) بالعدد بسيطاً ومقاماً $\sqrt{5}+2$ $\leftarrow \frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}+2} \times \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}-2} = \frac{\sqrt{5}-2}{5-4} = \frac{\sqrt{5}-2}{1}$

$\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}+2} = \frac{10-2\sqrt{5}+7}{10-2\sqrt{5}+7} = \frac{17-2\sqrt{5}}{10-2\sqrt{5}+7} = \frac{17-2\sqrt{5}}{3-2\sqrt{5}}$

$\sqrt{5} \frac{17}{3} + \frac{2}{3} =$

$$\frac{\bar{c}-3}{\bar{c}+0} = \frac{1+\bar{c}-c}{c+\bar{c}+3} = \frac{\bar{c}-\bar{c}c-\bar{c}+c}{\bar{c}c-\bar{c}c-\bar{c}3+3} = \frac{(\bar{c}-1)(\bar{c}+c)}{(\bar{c}c-3)(\bar{c}+1)} \quad (c)$$

$$\frac{1 - \bar{u} \Lambda - 10}{c7} = \frac{\bar{u} + \bar{u} \Lambda - \bar{u} \Lambda - 10}{1 + c0} = \frac{\bar{u} - 0}{\bar{u} - 0} \times \frac{\bar{u} - \Lambda}{\bar{u} + 0} = \frac{\bar{u} - \Lambda}{\bar{u} + 0} \leftarrow$$

$$\cdot \bar{u} \frac{\Lambda}{13} - \frac{10}{13} = \bar{u} \frac{\Lambda}{c7} - \frac{12}{c7} = \frac{\bar{u} \Lambda - 12}{c7} =$$

* * * تَدْرِيْبٌ * * * اُخْتَصِرَ لِاَلْبَنِي حَمُورَةَ :-

$$\frac{(\bar{u}+3)(\bar{u}+c)}{(\bar{u}-3)(\bar{u}-c)} \quad (14) \quad \frac{c7}{\bar{u}c-3} \quad (15) \quad \frac{\bar{u}7-2}{\bar{u}c} \quad (16)$$

مثال ۷ :- اگر $\frac{13}{\bar{u}-0} = 5$ ، $\frac{\bar{u}+4}{\bar{u}+1} = 0$ ، اسی لیے \bar{u} کی قیمت

س، ص مترافقانه ثم أوجد قيمة المقدار $س + س + س + س + س$

الكل

$$\textcircled{1} \frac{v_1}{c} + \frac{0}{c} = \frac{v+0}{c} = \frac{(v+0)1}{c \cdot 1} = \frac{(v+0)1}{1+0} = \frac{v+0}{v+0} \times \frac{1}{v-0} = 1$$

$$\psi_{\frac{1}{2}} - \psi_0 = \frac{\psi_0}{c} = \frac{c + \bar{\psi} - \psi}{c} = \frac{\bar{\psi}c - \bar{\psi}\psi - \bar{\psi}c + \psi}{1+1} = \frac{\bar{\psi}_{-1}}{\bar{\psi}_{-1}} \times \frac{\bar{\psi}_{c+1}}{\bar{\psi}_{+1}} = \psi_0$$

حصہ ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۰، ۲۱، ۲۲، ۲۳، ۲۴، ۲۵، ۲۶، ۲۷، ۲۸، ۲۹، ۳۰، ۳۱، ۳۲، ۳۳، ۳۴، ۳۵، ۳۶، ۳۷، ۳۸، ۳۹، ۴۰، ۴۱، ۴۲، ۴۳، ۴۴، ۴۵، ۴۶، ۴۷، ۴۸، ۴۹، ۵۰، ۵۱، ۵۲، ۵۳، ۵۴، ۵۵، ۵۶، ۵۷، ۵۸، ۵۹، ۶۰، ۶۱، ۶۲، ۶۳، ۶۴، ۶۵، ۶۶، ۶۷، ۶۸، ۶۹، ۷۰، ۷۱، ۷۲، ۷۳، ۷۴، ۷۵، ۷۶، ۷۷، ۷۸، ۷۹، ۸۰، ۸۱، ۸۲، ۸۳، ۸۴، ۸۵، ۸۶، ۸۷، ۸۸، ۸۹، ۹۰، ۹۱، ۹۲، ۹۳، ۹۴، ۹۵، ۹۶، ۹۷، ۹۸، ۹۹، ۱۰۰، ۱۰۱، ۱۰۲، ۱۰۳، ۱۰۴، ۱۰۵، ۱۰۶، ۱۰۷، ۱۰۸، ۱۰۹، ۱۱۰، ۱۱۱، ۱۱۲، ۱۱۳، ۱۱۴، ۱۱۵، ۱۱۶، ۱۱۷، ۱۱۸، ۱۱۹، ۱۲۰، ۱۲۱، ۱۲۲، ۱۲۳، ۱۲۴، ۱۲۵، ۱۲۶، ۱۲۷، ۱۲۸، ۱۲۹، ۱۳۰، ۱۳۱، ۱۳۲، ۱۳۳، ۱۳۴، ۱۳۵، ۱۳۶، ۱۳۷، ۱۳۸، ۱۳۹، ۱۴۰، ۱۴۱، ۱۴۲، ۱۴۳، ۱۴۴، ۱۴۵، ۱۴۶، ۱۴۷، ۱۴۸، ۱۴۹، ۱۵۰، ۱۵۱، ۱۵۲، ۱۵۳، ۱۵۴، ۱۵۵، ۱۵۶، ۱۵۷، ۱۵۸، ۱۵۹، ۱۶۰، ۱۶۱، ۱۶۲، ۱۶۳، ۱۶۴، ۱۶۵، ۱۶۶، ۱۶۷، ۱۶۸، ۱۶۹، ۱۷۰، ۱۷۱، ۱۷۲، ۱۷۳، ۱۷۴، ۱۷۵، ۱۷۶، ۱۷۷، ۱۷۸، ۱۷۹، ۱۸۰، ۱۸۱، ۱۸۲، ۱۸۳، ۱۸۴، ۱۸۵، ۱۸۶، ۱۸۷، ۱۸۸، ۱۸۹، ۱۹۰، ۱۹۱، ۱۹۲، ۱۹۳، ۱۹۴، ۱۹۵، ۱۹۶، ۱۹۷، ۱۹۸، ۱۹۹، ۲۰۰، ۲۰۱، ۲۰۲، ۲۰۳، ۲۰۴، ۲۰۵، ۲۰۶، ۲۰۷، ۲۰۸، ۲۰۹، ۲۱۰، ۲۱۱، ۲۱۲، ۲۱۳، ۲۱۴، ۲۱۵، ۲۱۶، ۲۱۷، ۲۱۸، ۲۱۹، ۲۲۰، ۲۲۱، ۲۲۲، ۲۲۳، ۲۲۴، ۲۲۵، ۲۲۶، ۲۲۷، ۲۲۸، ۲۲۹، ۲۳۰، ۲۳۱، ۲۳۲، ۲۳۳، ۲۳۴، ۲۳۵، ۲۳۶، ۲۳۷، ۲۳۸، ۲۳۹، ۲۴۰، ۲۴۱، ۲۴۲، ۲۴۳، ۲۴۴، ۲۴۵، ۲۴۶، ۲۴۷، ۲۴۸، ۲۴۹، ۲۵۰، ۲۵۱، ۲۵۲، ۲۵۳، ۲۵۴، ۲۵۵، ۲۵۶، ۲۵۷، ۲۵۸، ۲۵۹، ۲۶۰، ۲۶۱، ۲۶۲، ۲۶۳، ۲۶۴، ۲۶۵، ۲۶۶، ۲۶۷، ۲۶۸، ۲۶۹، ۲۷۰، ۲۷۱، ۲۷۲، ۲۷۳، ۲۷۴، ۲۷۵، ۲۷۶، ۲۷۷، ۲۷۸، ۲۷۹، ۲۸۰، ۲۸۱، ۲۸۲، ۲۸۳، ۲۸۴، ۲۸۵، ۲۸۶، ۲۸۷، ۲۸۸، ۲۸۹، ۲۹۰، ۲۹۱، ۲۹۲، ۲۹۳، ۲۹۴، ۲۹۵، ۲۹۶، ۲۹۷، ۲۹۸، ۲۹۹، ۳۰۰، ۳۰۱، ۳۰۲، ۳۰۳، ۳۰۴، ۳۰۵، ۳۰۶، ۳۰۷، ۳۰۸، ۳۰۹، ۳۱۰، ۳۱۱، ۳۱۲، ۳۱۳، ۳۱۴، ۳۱۵، ۳۱۶، ۳۱۷، ۳۱۸، ۳۱۹، ۳۲۰، ۳۲۱، ۳۲۲، ۳۲۳، ۳۲۴، ۳۲۵، ۳۲۶، ۳۲۷، ۳۲۸، ۳۲۹، ۳۳۰، ۳۳۱، ۳۳۲، ۳۳۳، ۳۳۴، ۳۳۵، ۳۳۶، ۳۳۷، ۳۳۸، ۳۳۹، ۳۴۰، ۳۴۱، ۳۴۲، ۳۴۳، ۳۴۴، ۳۴۵، ۳۴۶، ۳۴۷، ۳۴۸، ۳۴۹، ۳۵۰، ۳۵۱، ۳۵۲، ۳۵۳، ۳۵۴، ۳۵۵، ۳۵۶، ۳۵۷، ۳۵۸، ۳۵۹، ۳۶۰، ۳۶۱، ۳۶۲، ۳۶۳، ۳۶۴، ۳۶۵، ۳۶۶، ۳۶۷، ۳۶۸، ۳۶۹، ۳۷۰، ۳۷۱، ۳۷۲، ۳۷۳، ۳۷۴، ۳۷۵، ۳۷۶، ۳۷۷، ۳۷۸، ۳۷۹، ۳۸۰، ۳۸۱، ۳۸۲، ۳۸۳، ۳۸۴، ۳۸۵، ۳۸۶، ۳۸۷، ۳۸۸، ۳۸۹، ۳۹۰، ۳۹۱، ۳۹۲، ۳۹۳، ۳۹۴، ۳۹۵، ۳۹۶، ۳۹۷، ۳۹۸، ۳۹۹، ۴۰۰، ۴۰۱، ۴۰۲، ۴۰۳، ۴۰۴، ۴۰۵، ۴۰۶، ۴۰۷، ۴۰۸، ۴۰۹، ۴۱۰، ۴۱۱، ۴۱۲، ۴۱۳، ۴۱۴، ۴۱۵، ۴۱۶، ۴۱۷، ۴۱۸، ۴۱۹، ۴۲۰، ۴۲۱، ۴۲۲، ۴۲۳، ۴۲۴، ۴۲۵، ۴۲۶، ۴۲۷، ۴۲۸، ۴۲۹، ۴۳۰، ۴۳۱، ۴۳۲، ۴۳۳، ۴۳۴، ۴۳۵، ۴۳۶، ۴۳۷، ۴۳۸، ۴۳۹، ۴۴۰، ۴۴۱، ۴۴۲، ۴۴۳، ۴۴۴، ۴۴۵، ۴۴۶، ۴۴۷، ۴۴۸، ۴۴۹، ۴۵۰، ۴۵۱، ۴۵۲، ۴۵۳، ۴۵۴، ۴۵۵، ۴۵۶، ۴۵۷، ۴۵۸، ۴۵۹، ۴۶۰، ۴۶۱، ۴۶۲، ۴۶۳، ۴۶۴، ۴۶۵، ۴۶۶، ۴۶۷، ۴۶۸، ۴۶۹، ۴۷۰، ۴۷۱، ۴۷۲، ۴۷۳، ۴۷۴، ۴۷۵، ۴۷۶، ۴۷۷، ۴۷۸، ۴۷۹، ۴۸۰، ۴۸۱، ۴۸۲، ۴۸۳، ۴۸۴، ۴۸۵، ۴۸۶، ۴۸۷، ۴۸۸، ۴۸۹، ۴۹۰، ۴۹۱، ۴۹۲، ۴۹۳، ۴۹۴، ۴۹۵، ۴۹۶، ۴۹۷، ۴۹۸، ۴۹۹، ۵۰۰، ۵۰۱، ۵۰۲، ۵۰۳، ۵۰۴، ۵۰۵، ۵۰۶، ۵۰۷، ۵۰۸، ۵۰۹، ۵۱۰، ۵۱۱، ۵۱۲، ۵۱۳، ۵۱۴، ۵۱۵، ۵۱۶، ۵۱۷، ۵۱۸، ۵۱۹، ۵۲۰، ۵۲۱، ۵۲۲، ۵۲۳، ۵۲۴، ۵۲۵، ۵۲۶، ۵۲۷، ۵۲۸، ۵۲۹، ۵۳۰، ۵۳۱، ۵۳۲، ۵۳۳، ۵۳۴، ۵۳۵، ۵۳۶، ۵۳۷، ۵۳۸، ۵

الابداع في الرياضيات

كما دبر على مقدمة عهد الأعداء المربية "

٤ أوجد ناتج ما يأتي ضا أبسط صورة :-

$$\begin{array}{ll} (1) (3+5)(1-2) & (2) (3-2)(3+2) \\ (3) (3+5)(3-2) & (4) (3+5)(3-2) \\ (5) (3+5)(3-2) & (6) (3+5)(3-2) \end{array}$$

٥ أوجد مجموعة حل المعادلات الآتية :-

$$\begin{array}{ll} (1) 3x + 1 = 10 & (2) 9x + 1 = 10 \\ (3) \frac{3}{2}x + 1 = 10 & (4) 9x + 1 = 10 \\ (5) 4x + 1 = 10 & (6) 9x + 1 = 10 \end{array}$$

٦ أوجد قيمتي س، من اللينيه تحققاه كل هذه المعادلات الآتية :-

$$\begin{array}{ll} (1) (1+x) + 2x = 10 & (2) (1+x) + 2x = 10 \\ (3) (1+x) + 2x = 10 & (4) (1+x) + 2x = 10 \end{array}$$

٧ ضع كل ما يأتي ضا أبسط صورة :-

$$\begin{array}{ll} (1) \frac{x+2}{x} & (2) \frac{x-3}{x-2} \\ (3) \frac{2}{x+1} & (4) \frac{x-3}{x+3} \\ (5) \frac{2}{x-3} & (6) \frac{x+3}{x-5} \end{array}$$

٨ إذا كان $\frac{x+2}{x+1} = 3$ ، $\frac{x+2}{x+1} = 3$ أثبت أنه ل، م مترافقان

٩ أثبت أنه ل، م مترافقان

$$\begin{array}{ll} (1) \frac{1}{x} = \frac{1}{(x-3)} + \frac{1}{(x+3)} & (2) \frac{1}{x} = \frac{1}{(x-3)} + \frac{1}{(x+3)} \\ (3) \frac{1}{x} = \frac{1}{(x-3)} + \frac{1}{(x+3)} & (4) \frac{1}{x} = \frac{1}{(x-3)} + \frac{1}{(x+3)} \end{array}$$

مكتبة وسام

شويش - شارع حسني مبارك - خلف الثانوية بنات
01004423597.3943035

(٣) "تقديم نوع جذري المعادلة التربيعية"

المميز:-

* جذرا المعادلة التربيعية $Px^2 + bx + c = 0$ حيث $P \neq 0$ $b, c \in \mathbb{R}$ هما $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4Pc}}{2P}$ وكلاهما يحتوي على المقدار $\sqrt{b^2 - 4Pc}$ يسمى المقدار $b^2 - 4Pc$ "ميز المعادلة التربيعية" وليست قدم لتقديم نوع جذري

المعادلة التربيعية حسب الحالات الآتية :-

(١) إذا كان المميز موجبا أي أنه $b^2 - 4Pc > 0$

فإنه للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان

ومنحنى الدالة $D(P) = Px^2 + bx + c$ يتقاطع

محور السينات من نقطتين إحداثياتهما السالبة هما جذرا المعادلة

(٢) إذا كان المميز = صفر أي أنه $b^2 - 4Pc = 0$

فإنه للمعادلة جذران حقيقيان متساويان

ومنحنى الدالة $D(P) = Px^2 + bx + c$ ليس

محور السينات من نقطة واحدة إحداثياتها السالبة هو جذر المعادلة وهذه النقطة

هي $(-\frac{b}{2P}, \frac{b^2 - 4Pc}{4P})$ ويكونه الجذر هو $-\frac{b}{2P}$

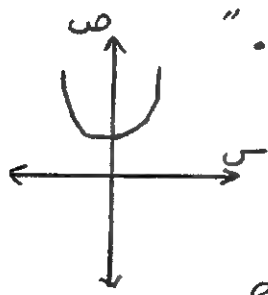
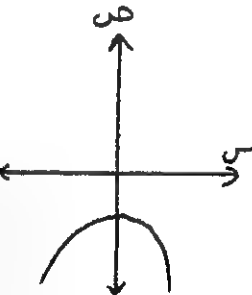
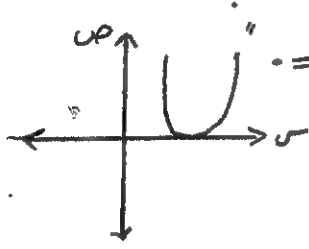
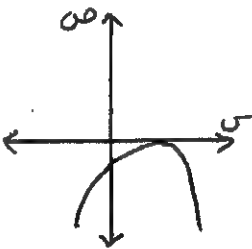
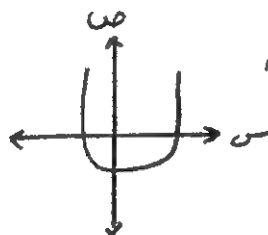
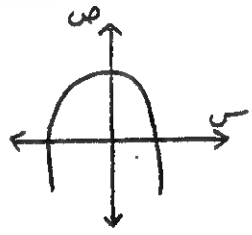
(٣) إذا كان المميز سالبا أي أنه $b^2 - 4Pc < 0$

فإنه للمعادلة جذران مركبان غير حقيقيين

وهما عددان مترافقان دائما

ومنحنى الدالة $D(P) = Px^2 + bx + c$ لا يترك

مع محور السينات من أي نقطة (لا يقطع ولا يمس)



مثال ① :- عيبر نوع جذري كل صه المعادلات الآتية ووه حل

$$(٣) \quad ٠ = ٩ + ٥١٢ + ٢٢$$

$$(١) \quad ٠ = ٦ - ٥٢ + ٣٢$$

$$(٤) \quad ٠ = ١ + ٥ + ٢٢$$

$$(٢) \quad ٠ = ٣ - ٥٥ + ٢٢$$

الحل :-

$$\begin{array}{l|l} ٣ = ٢ & \\ ٤ = ٥ & \\ ٦ = ٣ & \end{array}$$

$$(١) \quad ٠ = ٦ - ٥٢ + ٣٢$$

$$\text{المميز} = ٢ - ٤ = ١٦ = ٦ - ٥ \times ٣ \times ٤ - ١٦ = ٧٢ + ١٦ = ٨٨ < ٠$$

∴ الجذرايه حقيقيه مختلفاه

$$\begin{array}{l|l} ١ = ٢ & \\ ٥ = ٥ & \\ ٣ = ٣ & \end{array}$$

$$(٢) \quad ٠ = ٣ - ٥٥ + ٢٢$$

$$\text{المميز} = ٢ - ٤ = ١٦ = ٣ - ٥ \times ١ \times ٤ - ٢٥ = ١٢ + ٢٥ = ٣٧ < ٠$$

∴ الجذرايه حقيقيه مختلفاه

$$\begin{array}{l|l} ٤ = ٢ & \\ ١٢ = ٥ & \\ ٩ = ٣ & \end{array}$$

$$(٣) \quad ٠ = ٩ + ٥١٢ + ٢٢$$

$$\text{المميز} = ٢ - ٤ = ١٦ = ٩ \times ٤ \times ٤ - ١٤٤ = ١٤٤ - ١٤٤ = ٠$$

∴ الجذرايه حقيقيه متساويه

$$\begin{array}{l|l} ٢٥ = ٢ & \\ ١ = ٥ & \\ ١ = ٣ & \end{array}$$

$$(٤) \quad ٠ = ١ + ٥ + ٢٢$$

$$\text{المميز} = ٢ - ٤ = ١٦ = ١ \times ٢٥ \times ٤ - ١ = ١٠٠ - ١ = ٩٩ > ٠$$

∴ الجذرايه غير حقيقيه (مركليه)

* * * تدريب * عيبر نوع جذري كل صه المعادلات الآتية :-

$$(٤) \quad ٦ = (٢ - ٥)٢$$

$$(١) \quad ٠ = ٥ + ٥٢ - ٢٢$$

$$(٥) \quad ١ = ٥٢ - (٣ - ٥)٢$$

$$(٢) \quad ٠ = ٢٥ + ١٠ - ٢٢$$

$$(٦) \quad ٣ = (٤ + ٥)(٢ - ٥)$$

$$(٣) \quad ٤ = ٣٢ + ١٠ - ٢٢$$

في "ملاحظات"

- (١) المعادلة $P^2 + bP + c = 0$ يكون لها جذور حقيقية إذا كان $b^2 - 4c \geq 0$.
- (٢) إذا كانت المعاملات P, b, c أعداد نسبية وكان $b^2 - 4c$ مربع كامل (له جذر) فإن الجذور تكون أعداداً نسبية (مهمة).

(٣) إذا كان $c = 0$ $\Leftrightarrow P^2 + bP = 0 \Leftrightarrow P(P + b) = 0$

$$\begin{array}{l} P = 0 \text{ أو } P = -b \\ \boxed{\frac{P}{P} = 1} \end{array}$$

(٤) إذا كان $b = 0$ $\Leftrightarrow P^2 + c = 0$

$$P^2 = -c \Leftrightarrow P = \pm \sqrt{-c}$$

مثال ٥ :- إذا كان جذر المعادلة $3x^2 + 6x + c = 0$ متساويين. أوجد c .

الحل :- الجذور متساويين $\Leftrightarrow b^2 - 4c = 0$

$$36 - 4c = 0 \Leftrightarrow 4c = 36 \Leftrightarrow c = 9 \quad \boxed{c = 9}$$

مثال ٦ :- إذا كان P, b, c أعداداً نسبية فأثبت أنه جذر المعادلة

$$P^2 + (b^2 + c^2)P + (b^2c + bc^2) = 0$$

الحل :- المعاملات أعداد نسبية \therefore يجب أن تكون $b^2 - 4c$ مربع كامل.

$$\begin{array}{l} P = P \\ b^2 + c^2 = b^2 + c^2 \\ b^2c + bc^2 = bc(b + c) \end{array} \quad \begin{array}{l} \therefore P^2 + (b^2 + c^2)P + bc(b + c) = 0 \\ \Leftrightarrow P^2 + b^2P + c^2P + bc(b + c) = 0 \\ \Leftrightarrow P^2 + b^2P + c^2P + bcP + bc^2 = 0 \\ \Leftrightarrow P(P + b^2 + c^2 + bc) + bc(b + c) = 0 \end{array}$$

المعاملات أعداد نسبية \therefore المميز مربع كامل

الجذور نسبية #

* * * تدريبي * (١) إذا كان جذر المعادلة $x^2 + 2x + c = 0$ متساويين أو غير
* * * (٢) إذا كان $6P$ من أعداد نسبية فأثبت أنه جذر المعادلة
$$x^2 - P(x + 1) + 6 = 0$$
 نسبيًا.

مثال ٣ أثبت أنه جذر المعادلة $x^2 - 2x + c = 0$ مركبان وأوجد هـا.

الحل :: ∴ $x^2 - 2x + c = 0 \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{1-c}$
∴ الجذران مركبان.
$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4-4c}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{1-c}}{2} = 1 \pm \sqrt{1-c}$$

∴ جذرا المعادلة هما $1 + \sqrt{1-c}$ و $1 - \sqrt{1-c}$

* * * تدريبي * أثبت أنه جذر المعادلة $x^2 - 3x + 1 = 0$ مركبان وأوجد هـا.

مثال ٤ :: إذا كان جذر المعادلة $x^2 - 2x + c = 0$ متساويين
فأوجد قيمة c الحقيقية ثم أوجد الجذرين.
الحل :: ∴ $x^2 - 2x + c = 0$ "نضع المعادلة من الصورة العامة"

$$x^2 - 2x + c = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 - 1 + c = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 - 1 + c = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 1 - c$$

$$\Rightarrow x-1 = \pm \sqrt{1-c} \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{1-c}$$

∴ $c = 1$

عند $c = 1$ المعادلة هي $x^2 - 2x + 1 = 0$ (بالعقل)
$$(x-1)^2 = 0 \Rightarrow x-1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

أي أنه عندك c يكونه الجذرين متساويين وكل منهما $= 3$.

* عندك $c = 0$ المعادلة هي $x^2 - 1 = 0$ (بالعليل)

$$(x-1)(x+1) = 0 \Rightarrow x-1 = 0 \Rightarrow x=1$$

أي أنه عندك $c = 0$ يكونه الجذرين متساويين وكل منهما $= 1$.

* * * تدريب * أوجد قيم c الحقيقية التي تجعل جذري المعادلة $x^2 - 5x + c = 0$ جذرين حقيقيين متساويين. ثم أوجد هذين الجذرين.

مثال * :- أوجد قيم c الحقيقية التي تحقق المعادلة $x^2 - 4x + c = 0$ لها جذرين حقيقيين (لها حل ضح).

$$\begin{cases} 1 = p \\ c = b \\ c = q \end{cases}$$

الحل :- :- المعادلة لها جذرين حقيقيين

$$\Delta = b^2 - 4ac \geq 0 \Rightarrow 16 - 4c \geq 0 \Rightarrow c \leq 4$$

$$c = 4 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$c < 4 \Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow \text{جذرين حقيقيين مختلفين}$$

:- المعادلة لها جذرين حقيقيين إذا كان $c \leq 4$

* * * تدريب * ① أوجد قيم c التي تجعل للمعادلة $x^2 - 2x + c = 0$ جذرين حقيقيين مختلفين

② أوجد قيم m التي تجعل للمعادلة $x^2 - 4x + m = 0$ ليس لها جذور حقيقية (ليس لها حل ضح)

تماديته على "تحديد نوع جذري المعادلة التربيعية"

١٤ اختر الإجابة الصحيحة :-

١٤ إذا كان جذر المعادلة التربيعية $س^2 + ب س + ج = ٠$ غير حقيقيين فإما $ب^2 - ٤ ج < ٠$
 (أ) < ٠ (ب) > ٠ (ج) $= ٠$ (د) $= ١$

١٥ إذا كان جذر المعادلة $س^2 + ع س + ك = ٠$ متساويين فإما $ك = ١$
 (أ) $- ٢$ (ب) ٢ (ج) $- ١$ (د) ١

١٥ إذا كان جذر المعادلة $س^2 = س - ك$ حقيقيين مختلفين فإما $ك > ١$
 (أ) $[١, ٢]$ (ب) $[١, ٢]$ (ج) $[١, ٢]$ (د) $[١, ٢]$

١٦ يكون جذر المعادلة $س^2 - ٩ س + ٩ = ٠$ حقيقيين إذا كانت
 (أ) $ك < ٩$ (ب) $ك > ٩$ (ج) $ك = ٩$ (د) $ك = ١$

١٦ حدد نوع جذري كل معادلة من المعادلات الآتية ووجه حلها :-

(١) $س^2 - ٦ س - ١٩ = ٠$

(١) $س^2 - ٥ س + ٥ = ٠$

(٢) $س^2 - (١١ - س) س - (٦ - س) = ٠$

(٢) $س^2 + ١٠ س - ٥ = ٠$

(٣) $س^2 - (١ - س)(٧ - س) = ٢(٣ - س)(٥ - س)$

(٣) $س^2 - ١٠ س + ٢٥ = ٠$

١٧ أوجد مجموعة حل كل معادلة من المعادلات الآتية باستخدام القانون العام :-

(١) $س^2 - ٦ س + ٥ = ٠$

(١) $س^2 - ٥ س + ٥ = ٠$

(٢) $س^2 - (١ - س)(٧ - س) = ٢(٣ - س)(٥ - س)$

(٢) $س^2 + ١٠ س - ٥ = ٠$

١٨ أوجد قيمة $ك$ من كل معادلات الآتية :-

(١) إذا كان جذر المعادلة $س^2 + ع س + ك = ٠$ حقيقيين مختلفين .

(٢) إذا كان جذر المعادلة $س^2 - ٣ س + ٢ = ٠$ متساويين .

(٣) إذا كان جذر المعادلة $س^2 - ٨ س + ١٦ = ٠$ حقيقيين .

5 إذا كان L, M عدديين نسبيلين فثبت أنه جذري المعادلة

$$Lx^2 + (L-M)x + M = 0 \text{ . جذوره نسبيلان .}$$

6 إذا كان جذرا المعادلة $Lx^2 + (L-M)x + M = 0$. متساويان

فأوجد قيم L الحقيقية ثم أوجد الجذرين .

7 أوجد قيمة L إذا كان :-

(1) جذرا المعادلة $Lx^2 + (L-M)x + M = 0$ حقيقيان مختلفان .

(2) جذرا المعادلة $(L-M)x^2 - (L+M)x + M = 0$ غير حقيقيين .

8 اثبت أنه لجميع قيم P الحقيقية عدا الصفر يكون للمعادلة :-

$$(1+P)x^2 + Px + 1 = 0 \text{ جذور حقيقية}$$

9 يقدر عدد سكان جمهورية مصر العربية عام ٢٠١٣ بالعلاقة :-

$$S = 91 + 0.01n \text{ حيث } S \text{ عدد السكان بالمليون ، } n \text{ عدد السنوات}$$

(1) كم كان عدد السكان عام ٢٠١٣ ؟

(2) قدر عدد السنوات التي يبلغ السكان فيها ٣٣٤ مليون

(3) قدر عدد السكان عام ٢٠٢٣ ؟

10 قطعة أرض على شكل مستطيل بعرض ٩٤٦ مه الاقطار ، يراد مضاعفة

مساحة هذه القطعة وذلك بزيادة طول كل من بعديها بنفس المقدار

أوجد المقدار المضاف .

مكتبة وسام

شربين - شارع حسني مبارك - خلف الثانوية بنات

01004423597.3943035

أ / جميل غالي السيد

(٤٤)

الفصل الدراسي الأول

٤٤) الطلاقة بسده جذري المعادلة التربيعية ومعاملات حدودها

توضيح :-

نعلم أنه جذري المعادلة $x^2 - 13x + 6 = 0$ هما $\frac{1}{3}$ و $\frac{2}{3}$

نلاحظ أنه :- * مجموع الجذرين = $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{3}{3} = 1$ = معامل x

* حاصل ضربهم = $\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$ = $\frac{\text{الحاصل المقلوب}}{\text{معامل } x^2} = 1$

⊗ مجموع الجذرين وحاصل ضرب الجذرين :-

جذرا المعادلة التربيعية $ax^2 + bx + c = 0$ هما $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ و $x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

باعتبار الجذر الأول = L ، الجذر الآخر = M فإنه :-

$$L + M = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$L \cdot M = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

وهي الخلاصة :-

وإذا كان L, M هما جذرا المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ فإنه

$\frac{c}{a} = L + M$	أي أنه مجموع الجذرين = $-\frac{b}{a}$ = معامل x
$\frac{c}{a} = L \cdot M$	أي أنه حاصل ضربهم = $\frac{c}{a}$ = $\frac{\text{الحاصل المقلوب}}{\text{معامل } x^2}$

(مهمة)

مثال ① :- دوو دك المعادلة أوجد مجموع الجذرين وحاصل ضربهم لكل من المعادلات الآتية :-

(١) $x^2 - 5x - 3 = 0$ $(٣) \quad x^2 + 3x - 30 = 0$

(٢) $x^2 - 3x - 30 = 0$

الحل :-

(١) $x^2 - 5x - 3 = 0$ $(٢) \quad x^2 - 3x - 30 = 0$

∴ مجموع الجذرين = $\frac{5}{1} = 5$ ، حاصل ضربهم = $\frac{-3}{1} = -3$ $(٢) \quad x^2 - 3x - 30 = 0$

∴ مجموع الجذور = $\frac{-c}{a} = \frac{-3}{1} = -3$ حاصل ضرب = $\frac{c}{a} = \frac{3}{1} = 3$

$$7- = 061 = 06C = P \quad \therefore 7- = 0 + 0C \Leftarrow$$

$$\therefore \text{مجموع الجذور} = \frac{-b}{a} = \frac{-5}{1} = -5 \quad \text{و حاصل ضربها} = \frac{c}{a} = \frac{-6}{1} = -6$$

$$\Sigma = (c-s) \text{ و } (4) \quad \therefore = 1 + s - \Sigma + s^2 \quad (1)$$

$$(c) \quad 3s + 0 = 0 \quad (c) \quad (e) \quad (1-s)(s+3) = 0$$

الحل :- $\therefore \frac{C}{C} - \frac{C}{C} = 1 + 1 = 2$

\therefore حاصل ضرب الجذرين $0 = \frac{p}{p} \Leftarrow 0 = \frac{p}{p}$
 \therefore المعادلة هي $0 = 0 + 0$

$$\frac{\sqrt{c-25} \pm c}{c} = \frac{\sqrt{0 \times 1 \times 2 - 25} \pm c}{1 \times c} = \frac{\sqrt{25 - 25} \pm c}{1 \times c} = \frac{0 \pm c}{c} = 0$$

* * تدریجی * * ، اذا كان حاصل ضرب جذري المقارنة $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$.
 * * یساوی ۱ اَوْ جُزْئِیَّةٌ لَکَ نَمِ هَذِهِ الْمَقَارِنَةُ

مثال ١٥ :- إذا كان $x^2 - 5x + 6 = 0$ فما جذور المعادلة

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

أو جذرية كل x ب

الحل :- مجموع الجذرين $= 5$ $\Rightarrow x_1 + x_2 = 5$ $\Rightarrow x_1 = 5 - x_2$

:- حاصل ضرب $= 6$ $\Rightarrow x_1 \times x_2 = 6$ $\Rightarrow (5 - x_2) \times x_2 = 6$

$$5x_2 - x_2^2 = 6 \Rightarrow x_2^2 - 5x_2 + 6 = 0$$

مثال ١٦ :- إذا كان $x^2 + 3x - 4 = 0$ أحد جذور المعادلة

حيث $x_1 = 1$ $x_2 = -4$ أو جذر الآخر، قيمة x_3 .

الحل :-

فد باله :-
إذا كان جذر المعادلة
عدوانه قرله باه
فانها يكونا
مراقطاه

:- $(x^2 + 3x - 4)$ جذر للمعادلة $\Rightarrow (x^2 - 3x - 4)$ هو الجذر الآخر

:- مجموع الجذرين $= -3$ $\Rightarrow x_1 + x_2 = -3$

:- حاصل ضرب $= -4$ $\Rightarrow x_1 \times x_2 = -4$ $\Rightarrow (1 - 3) \times (-4) = -4$

$$1 - 3 = -2 \Rightarrow -2 \times (-4) = 8$$

هناك حل آخر لهذه المسألة وذلك بالتعويض عن $x = 1$ في المعادلة
ثم نوجد x_2 ثم نحل المعادلة بالقانون لإيجاد الجذر الآخر.

* * *
تدريج * (١) إذا كان $x^2 - 5x + 6 = 0$ جذر المعادلة
أو جذرية كل x ب * *

(٢) إذا كان $x^2 - 2x - 1 = 0$ أحد جذور المعادلة
حيث $x_1 = 1$ $x_2 = -1$ أو جذر الآخر، قيمة x_3 .

مكة "ملاحظة هامة" من المعادلة التربيعية $p^2 + 5p + 6 = 0$.

(1) إذا كان $p = 1$ $\Leftrightarrow p + 1 = 2$ $\Leftrightarrow p = 1$ $\Leftrightarrow p = 1$

(2) إذا كان $p = 0$ $\Leftrightarrow p + 1 = 1$ $\Leftrightarrow p = 0$ $\Leftrightarrow p = 0$

أي أنه: إذا كان أحد الجذور مقلوب بعض الآخر فإن $p = 6$ $\Leftrightarrow p = 6$

(3) إذا كان $p = 2$ $\Leftrightarrow p + 1 = 3$ $\Leftrightarrow p = 2$ $\Leftrightarrow p = 2$

أي أنه: إذا كان أحد جذري المعادلة مقلوب ضربي للآخر فإن $p = 6$ $\Leftrightarrow p = 6$

مثال ٥: - آمل:-

(1) إذا كان أحد جذري المعادلة $3x^2 + 5x + 7 = 0$ مقلوبًا جمعياً للآخر فإن $p = 2$ $\Leftrightarrow p = 2$

(2) إذا كان أحد جذري المعادلة $2x^2 + 5x + 1 = 0$ مقلوبًا ضربياً للآخر فإن $p = 2$ $\Leftrightarrow p = 2$

الحل:-

(1) إذا كان أحد الجذور مقلوب بعض الآخر $\Leftrightarrow p = 2$ $\Leftrightarrow p = 2$ $\Leftrightarrow p = 2$

(2) إذا كان أحد الجذور مقلوب ضربي للآخر $\Leftrightarrow p = 2$ $\Leftrightarrow p = 2$ $\Leftrightarrow p = 2$

$\Leftrightarrow p = 2$ $\Leftrightarrow p = 2$ $\Leftrightarrow p = 2$ $\Leftrightarrow p = 2$

مكة بعض الملاحظات الهامة للتمارين اللفظية:-

* أحد الجذور ضعف الآخر "ل 6 ل 3" \Leftrightarrow * أحد الجذور ثلاثة أضعاف الآخر "ل 6 ل 3"

* أحد الجذور مربع الآخر "ل 6 ل 3" \Leftrightarrow * النسبة بين الجذور = 3:1 "ل 6 ل 3"

* مجموع الجذور = 0 "ل 6 ل 3" \Leftrightarrow * أحد الجذور ينزعه الآخر بمقدار 6 "ل 6 ل 3"

* أحد الجذور ثلاثة أضعاف الآخر "ل 6 ل 3" \Leftrightarrow * أحد الجذور ضعف الآخر "ل 6 ل 3"

* أحد الجذور ثلاثة أضعاف الآخر "ل 6 ل 3" \Leftrightarrow * أحد الجذور ضعف الآخر "ل 6 ل 3"

* أحد الجذور ينزعه الآخر بمقدار 6 "ل 6 ل 3" \Leftrightarrow * أحد الجذور ينزعه الآخر بمقدار 6 "ل 6 ل 3"

مثال ⑥ :- إذا كان أحد جذري المعادلة $x^3 + 3x^2 + 5x + 1 = 0$ ضعف الجذر الآخر
أوجد قيمة له .

$$\begin{array}{l} 1 = p \\ 3 = q \\ 5 = r \\ 1 = s \end{array}$$

الحل :- بفرضه أحد الجذرين $x = l$:- الجذر الآخر $x = cl$.

$$\therefore \text{مجموع الجذرين} = \frac{-q}{p} \Leftrightarrow \frac{-3}{1} = l + cl \Leftrightarrow \frac{-3}{1} = l(1+c) \Leftrightarrow \frac{-3}{1+c} = l \quad (1)$$

$$\therefore \text{حاصل ضربهم} = \frac{r}{p} = \frac{5}{1} = l \times cl \Leftrightarrow \frac{5}{l} = cl \Leftrightarrow \frac{5}{-3/(1+c)} = cl \Leftrightarrow \frac{5(1+c)}{-3} = cl$$

$$\Leftrightarrow \frac{5(1+c)}{-3} = cl \Leftrightarrow \frac{5(1+c)}{-3} = \frac{-3}{1+c} \Leftrightarrow 5(1+c)^2 = 9$$

مثال ⑦ :- أوجد قيمة m التي تجعل أحد جذري المعادلة $x^3 + 3x^2 + 5x + 1 = 0$ من مضروب
ضعف الجذر الآخر بقدر 1

$$\begin{array}{l} 1 = p \\ 3 = q \\ 5 = r \\ 1 = s \end{array}$$

الحل :- $\therefore x^3 + 3x^2 + 5x + 1 = 0 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 5x + 1 = 0$

بفرضه أحد الجذرين $x = l$:- الجذر الآخر $x = cl$

$$\therefore \text{مجموع الجذرين} = \frac{-q}{p} = \frac{-3}{1} = l + cl \Leftrightarrow \frac{-3}{1} = l(1+c) \Leftrightarrow \frac{-3}{1+c} = l$$

$$\therefore \text{حاصل ضربهم} = \frac{r}{p} = \frac{5}{1} = l \times cl \Leftrightarrow \frac{5}{l} = cl \Leftrightarrow \frac{5}{-3/(1+c)} = cl \Leftrightarrow \frac{5(1+c)}{-3} = cl$$

$$\begin{array}{r} \text{⑦} \\ \begin{array}{r} 3 \\ + \\ 3 \\ \hline 6 \end{array} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5(1+c)}{-3} = cl \Leftrightarrow \frac{5(1+c)}{-3} = \frac{-3}{1+c} \Leftrightarrow 5(1+c)^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow \frac{5(1+c)}{-3} = \frac{-3}{1+c} \Leftrightarrow \frac{5(1+c)}{-3} = \frac{-3}{1+c}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5(1+c)}{-3} = \frac{-3}{1+c} \Leftrightarrow \frac{5(1+c)}{-3} = \frac{-3}{1+c}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5(1+c)}{-3} = \frac{-3}{1+c} \Leftrightarrow \frac{5(1+c)}{-3} = \frac{-3}{1+c}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5(1+c)}{-3} = \frac{-3}{1+c} \Leftrightarrow \frac{5(1+c)}{-3} = \frac{-3}{1+c}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5(1+c)}{-3} = \frac{-3}{1+c} \Leftrightarrow \frac{5(1+c)}{-3} = \frac{-3}{1+c}$$

* تدريس * (1) إذا كان أحد جذري المعادلة $x^3 + 3x^2 + 5x + 1 = 0$ ضعف الجذر الآخر
* * * الجذر الآخر أوجد قيمة له

(2) أوجد قيمة له التي تجعل جذري المعادلة $x^3 + 3x^2 + 5x + 1 = 0$ ثلاثة أمثال الجذر الآخر .

مثال ① :- أوجد الشرط اللازم لكي يكون أحد جذري المعادلة

$$P^2 + 5P + 6 = 0 \text{ . مساوياً العكس المجهول لضعف الجذر الآخر}$$

الحل :- نفرض أحد الجذرين $L = 0$:- الجذر الآخر $= -C$

$$\text{:- مجموع الجذرين} = \frac{C}{P} \Leftrightarrow L - C = -\frac{C}{P} \Leftrightarrow L = \frac{C}{P} \Leftrightarrow \boxed{\frac{C}{P} = L} \text{ ①}$$

$$\text{:- حاصل ضربهم} = \frac{C}{P} \Leftrightarrow L(-C) = \frac{C}{P} \Leftrightarrow \boxed{\frac{C}{P} = -LC} \text{ ②}$$

$$\text{بالتعويض من ① في ②} \Leftrightarrow \frac{C}{P} = \left(\frac{C}{P}\right)(-C) \Leftrightarrow \frac{C}{P} = \frac{-C^2}{P} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{C}{P} = \frac{-C^2}{P} \Leftrightarrow \boxed{0 = P + C} \text{ "الشرط المطلوب"}$$

* * * ترتيب * * * أوجد الشرط اللازم لكي يكون أحد جذري المعادلة

$$P^2 + 5P + 6 = 0 \text{ . مساوياً ضعف الجذر الآخر}$$

مثال ② :- أوجد قيمة P التي تجعل جذري المعادلة $x^2 - 3x + C + \frac{1}{P} = 0$ مساويين

الحل :- :- الجذرين متساويين $\Leftrightarrow x^2 - 3x + P = 0$

$$1 = P$$

$$3 = C$$

$$\frac{1}{P} + C = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + \left(\frac{1}{P} + C\right) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x = P} \Leftrightarrow \frac{x}{P} = 1$$

مثال ③ :- إذا كان حاصل ضرب جذري المعادلة $x^2 + 5x + C = 0$ يساوي

مجموع جذري المعادلة $x^2 - (L + C)x + C = 0$ أوجد قيمة L

الحل :- حاصل ضرب جذري المعادلة الأولى $= \frac{C}{P} = \frac{C}{L+C} = \frac{C}{L+C} = \frac{C}{L+C}$

$$\text{:-} \frac{C}{L+C} = \frac{C}{L+C} \Leftrightarrow L + C = C \Leftrightarrow \boxed{L = 0}$$

تمارين على "العلامة" سيمر جذري المعادلة لتربيعية ومعاملات حدودها

❶ اختر الاجابة الصحيحة :-

❶ مجموع جذري المعادلة $x^2 + 5x + 10 = 0$ يساوي [-5 ، -10 ، 5 ، 10]

❷ حاصل ضرب جذري المعادلة $x^2 - 3x + 0 = 0$ يساوي [$\frac{3}{2}$ ، $\frac{3}{2}$ ، $\frac{0}{2}$ ، $\frac{0}{2}$]

❸ مجموع جذري المعادلة $x^2 - 5x + 7 = 0$ يساوي [-5 ، -7 ، 5 ، 7]

❹ إذا كان مجموع مجموع جذري المعادلة $x^2 + 12x + 7 = 0$ يساوي 3 فإنه $k = \dots$

[-7 ، -1 ، 7 ، 1]

❺ إذا كان حاصل ضرب جذري المعادلة $x^2 + 4x + c = 0$ يساوي 1 فإنه $k = \dots$

[-1 ، -1 ، 1 ، 1]

❻ إذا كان أحد جذري المعادلة $x^2 - (3+k)x + k = 0$ معلوم مخرج للأخر فإنه $k = \dots$

[-3 ، -3 ، 3 ، 3]

❼ إذا كان أحد جذري المعادلة $x^2 - (3+k)x + k = 0$ معلوم جذري للأخر فإنه $k = \dots$

[-3 ، -3 ، 3 ، 3]

❽ إذا كان أحد جذري المعادلة $x^2 - 12x + 1 = 0$ ثلاثة أضعاف الآخر فإنه $k = \dots$

[-1 ، -1 ، 1 ، 1]

❾ دونه حل المعادلة أو جد مجموع الجذير وحاصل ضربهم لكل من المعادلات الآتية :-

(1) $x^2 + 5x - 30 = 0$ (ب) $(x^2 + 3x + c)(x^2 - 5x + 0) = 0$

(2) $\frac{1}{x-3} + \frac{1}{x+3} = 3$ (3) $3x^2 - 7x + 1 = 0$

❿ إذا كان حاصل ضرب جذري المعادلة $x^2 + 10x + 3 = 0$ هو $\frac{1}{3}$ أو جذرية ج

ثم حل المعادلة في مجموعة الأعداد المركبة

⓫ إذا كان مجموع جذري المعادلة $x^2 + 5x - 0 = 0$ هو $\frac{3}{2}$ أو جذرية ب

ثم حل المعادلة في مجموعة الأعداد المركبة

٥ أوجد الجذر الآخر للمعادلة ثم أوجد قيمة P من كل مما يأتي :-

(١) إذا كان $x = 1$ أحد جذري المعادلة $x^2 - 5x + P = 0$

(٢) إذا كان $x = 1$ أحد جذري المعادلة $x^2 - 5x + P = 0$

٦ أوجد قيم P و b من كل من المعادلات الآتية إذا كان :-

(١) $x^2 + 5x + P = 0$ جذرا المعادلة $x^2 + 5x + P = 0$

(٢) $x^2 + 5x + P = 0$ جذرا المعادلة $x^2 + 5x + P = 0$

(٣) $x^2 + 5x + P = 0$ جذرا المعادلة $x^2 + 5x + P = 0$

٧ أوجد قيمة k التي تجعل أحد جذري المعادلة $x^2 + 5x + k = 0$

هو المقلوس الضرب للجذر الآخر

٨ أوجد قيمة k التي تجعل أحد جذري المعادلة $x^2 + 5x + k = 0$

المقلوس المحض للجذر الآخر

٩ إذا كان $x = 1$ أحد جذري المعادلة $x^2 + 5x + k = 0$ ليساوي مربع الجذر الآخر

أوجد قيمة k

١٠ إذا كانت النسبة بين جذري المعادلة $x^2 + 5x + k = 0$ كنسبة $2:3$

أثبت أنه $P = 6$

١١ أوجد الشرط اللازم لكي يكون أحد جذري المعادلة $x^2 + 5x + k = 0$

نصف الجذر الآخر

١٢ إذا كان مجموع جذري المعادلة $x^2 + 5x + k = 0$ ليساوي حاصل

ضرب جذري المعادلة $x^2 + 5x + k = 0$ أوجد قيمة k

١٠. تكوير المعادلة التربيعية من علم جذراها

* إذا فرضنا أن $ل، م$ هما جذري المعادلة التربيعية $س^2 + ب س + ج = ٠$ #٢٤

بالقسمة على $س$ $س + \frac{ج}{س} + ب = ٠$ $\text{---} ①$

ونعلم أن $ل + م = -ب$ ، $\frac{ج}{ل} = \frac{ج}{م}$ بالتقويض من ①

في المعادلة تكوير على الصورة $س - (ل + م) + س = ٠$

أي أن $س - (\text{مجموع الجذرين}) + س = \text{حاصل ضرب الجذرين}$ معطى

وتجلبه أيضا أنه تلعب المعادلة على الصورة $٠ = (س - ل)(س - م)$

مثال ① :- تكوير المعادلة التربيعية التي جذراها :-

$$(٣) \quad ٣س + ٤س - ٢٤ = ٠$$

$$(١) \quad ٥، ٣$$

$$(٤) \quad \frac{٤س + ٥س - ٢٤}{س + ١} = ٠$$

$$(٢) \quad ٥س + ٤س - ٢٤ = ٠$$

الحل :-

$$(١) \quad \text{مجموع الجذرين} = ٥ + ٣ = ٨ \quad \text{حاصل ضرب الجذرين} = ٥ \times ٣ = ١٥$$

:- المعادلة تكوير على الصورة $س - (\text{مجموع الجذرين}) + س = \text{حاصل ضرب الجذرين}$

$$\# \quad ٠ = ١٥ + س٨ - س$$

$$(٢) \quad \text{مجموع الجذرين} = ٥ + ٣ = ٨ \quad \text{حاصل ضرب الجذرين} = ٥ \times ٣ = ١٥$$

$$\# \quad ٠ = ١ - س٨ - س$$

$$(٣) \quad \text{مجموع الجذرين} = ٣ + ٤ = ٧ \quad \text{حاصل ضرب الجذرين} = (٣ - ٤)(٣ + ٤) = ٩ - ١٦ = -٧$$

$$\# \quad ٠ = ٧ - س٦ - س$$

(٤) نضع كل جذر في أبسط صورة أولًا :- لفرصه أنه الجذر ل $م$

$$\# \quad ل = \frac{٢٤ - ٤س}{٣ + ٤س} = \frac{٢٤ - ٤س}{١ + ١} = \frac{(٢٤ - ٤س)}{(١ + ١)} = \frac{٢٤ - ٤س}{٢} = ١٢ - ٢س$$

$$\frac{x^2}{x} = x \leftarrow x = \frac{x^2}{x}$$

$$\frac{x^2 - 10x + 9}{0} = \frac{x^2 - 10x + 9}{1+x} = \frac{(x+9)(x-1)}{(x+9)(x-1)} = \frac{x+9}{x+9} \times \frac{x-1}{x-1} = 1$$

$$0 \leftarrow x = \frac{10}{0} =$$

$$\boxed{2} = x^2 - 10x + 9 = x^2 - 10x + 9 = 1 \quad \text{لـ} \quad \boxed{\text{مفرد}} = (x-1) + x = 1 + 1 = 2$$

$$\therefore \text{المعادلة هي } x^2 - 10x + 9 = 0 \quad \leftarrow \quad x^2 - 10x + 9 = 0$$

* * * ترتيب * كونه المعادلة التربيعية التي جذراها :-

مكتبة وسام
شريف - شارع حسي مبارك خلف الثانوية بنات
01004423597.3943035

$$(1) \quad x^2 - 10x + 9 = 0$$

$$(2) \quad x^2 - 10x + 9 = 0$$

$$(3) \quad x^2 - 10x + 9 = 0$$

* تكويده معادلة تربيعية بعلومية معادلة تربيعية أخرى

مثال ٥ :- إذا كان لـ معادلة جذرا المعادلة $x^2 - 10x + 9 = 0$ أوجد المعادلة التي

$$\text{جذراها } 1 + 2 \text{ و } 1 + 3$$

$$\begin{aligned} 1 &= p \\ 7 &= q \\ 3 &= r \end{aligned}$$

الحل :- * نحل أي مسألة من هذه النوع بالخطوات التالية :-

$$\text{المعادلة المطلوبة :- } * \text{ مجموع الجذور } = \frac{c}{a} \quad \leftarrow \quad 7 = 1 + 2 + 3$$

$$* \text{ حاصل ضربهم } = \frac{c}{a} \quad \leftarrow \quad 3 = 1 \times 2 \times 3$$

$$\text{المعادلة المطلوبة :- } * \text{ مجموع الجذور } = \frac{c}{a} \quad \leftarrow \quad 9 = 1 + 7 = 1 + (2 + 3) = 1 + 2 + 3$$

$$\text{الحل :- } * \text{ حاصل ضربهم } = \frac{c}{a} \quad \leftarrow \quad 11 = 1 + 7 + 3 = 1 + 2 + 3 + 3 = (1+2)(1+3) = 3 \times 4 = 12$$

$$\therefore \text{المعادلة المطلوبة هي } x^2 - 11x + 12 = 0$$

* * * ترتيب * إذا كان لـ معادلتها جذرا المعادلة $x^2 - 10x + 9 = 0$ كونه المعادلة التي جذراها $1 + 2$ و $1 + 3$

٥. بعبر المعطيات الخاصة المستخدمة في هذه المسائل :-

$$\begin{aligned} * \quad \text{لـ} + \text{م} &= \text{م} + \text{ل} = \text{م} + \text{ل} = \text{م} + \text{ل} \\ * \quad \text{ل} + \text{م} &= \text{م} + \text{ل} = \text{م} + \text{ل} = \text{م} + \text{ل} \\ * \quad \frac{\text{م} + \text{ل}}{\text{م}} &= \frac{1}{\text{م}} + \frac{1}{\text{ل}} \\ * \quad \frac{\text{م} + \text{ل}}{\text{م}} &= \frac{\text{م} + \text{ل}}{\text{م}} = \frac{1}{\text{ل}} + \frac{1}{\text{م}} \end{aligned}$$

مثال ٥ :- إذا كان ل، م جذرا المعادلة $x^2 - 5x + 0 = 0$. أوجد المعادلة التي جذراها

$$\begin{aligned} \text{ل} &= \text{م} \\ \text{ل} &= \text{م} \\ \text{ل} &= \text{م} \\ \text{ل} &= \text{م} \\ \text{ل} &= \text{م} \\ \text{ل} &= \text{م} \\ \text{ل} &= \text{م} \\ \text{ل} &= \text{م} \\ \text{ل} &= \text{م} \\ \text{ل} &= \text{م} \end{aligned}$$

مثال ٥ :- إذا كان ل، م جذرا المعادلة $x^2 - 5x + 0 = 0$. أوجد المعادلة التي

$$\begin{aligned} \text{ل} &= \text{م} \\ \text{ل} &= \text{م} \\ \text{ل} &= \text{م} \\ \text{ل} &= \text{م} \\ \text{ل} &= \text{م} \\ \text{ل} &= \text{م} \\ \text{ل} &= \text{م} \\ \text{ل} &= \text{م} \\ \text{ل} &= \text{م} \\ \text{ل} &= \text{م} \end{aligned}$$

مثال ٥ :- إذا كان لـ ٢ هاجزا المعادلة $x^2 - 3x - 1 = 0$ كونه المعادلة التربيعية

التي هاجزاها (١) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x} = 3$ (٢) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x} = 1$

(٣) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x} = 3$

الحل :-

المعادلة المعطاة : * مجموع الجذور $= \frac{c}{a} = \frac{-1}{1} = -1$ $\Rightarrow x_1 + x_2 = -1$

* حاصل ضربهم $= \frac{b}{a} = \frac{-3}{1} = -3$ $\Rightarrow x_1 x_2 = -3$

← (١) المعادلة المطلوبة : * مجموع الجذور $= \frac{c}{a} = \frac{-1}{1} = -1$ $\Rightarrow \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -1$
 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -1 \Rightarrow \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = -1 \Rightarrow \frac{-1}{-3} = -1$

* حاصل ضربهم $= \frac{b}{a} = \frac{-3}{1} = -3$ $\Rightarrow \frac{1}{x_1} \times \frac{1}{x_2} = -3$

∴ المعادلة المطلوبة هي $x^2 - 3x - 1 = 0$ *

← (٢) المعادلة المطلوبة : * مجموع الجذور $= \frac{c}{a} = \frac{-1}{1} = -1$ $\Rightarrow \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -1$

* حاصل ضربهم $= \frac{b}{a} = \frac{-3}{1} = -3$ $\Rightarrow \frac{1}{x_1} \times \frac{1}{x_2} = -3$

∴ المعادلة المطلوبة هي $x^2 - 3x - 1 = 0$ *

← (٣) المعادلة المطلوبة : * مجموع الجذور $= \frac{c}{a} = \frac{-1}{1} = -1$ $\Rightarrow \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -1$

$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -1 \Rightarrow \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = -1 \Rightarrow \frac{-1}{-3} = -1$

* حاصل ضربهم $= \frac{b}{a} = \frac{-3}{1} = -3$ $\Rightarrow \frac{1}{x_1} \times \frac{1}{x_2} = -3$

$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -1 \Rightarrow \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = -1 \Rightarrow \frac{-1}{-3} = -1$

∴ المعادلة المطلوبة هي $x^2 - 3x - 1 = 0$ *

* تدريبات * (١) إذا كان لـ ٢ هاجزا المعادلة $x^2 + 3x - 5 = 0$ كونه المعادلة التربيعية

التي هاجزاها لـ ٢

(٢) إذا كان لـ ٢ هاجزا المعادلة $x^2 + 3x - 5 = 0$ كونه المعادلة التربيعية

التي هاجزاها :- (١) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x} = 3$ (٢) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x} = 1$

مثال ٦ :- إذا كان $3 + 2\sqrt{3} + d$ هما جذري المعادلة $x^2 - 11x + 7 = 0$.

كوتر المعادلة التي جذراها $d, 3$

الحل :- المعادلة المعطاة : * مجموع الجذور $= \frac{c}{a} \Rightarrow 11 = 3 + 2 + 3 + d \Rightarrow 11 = 7 + 3 + d \Rightarrow$

$$d = 4 \Rightarrow 5 = 3 + d \Rightarrow$$

$$7 = (3+2)(3+d) \Rightarrow \frac{7}{3} = \text{حاصل ضربهم} \Rightarrow$$

$$c = (3+d)3 + 3d \Rightarrow 7 = 9 + 3d + 3d + 3d \Rightarrow$$

$$c = 1 \Rightarrow 10 + 3d = c \Rightarrow 10 + 3d = 0 \times 3 + 3d \Rightarrow \boxed{17} = 3d \Rightarrow$$

∴ المعادلة المطلوبة التي جذراها $d, 3$ هي $x^2 - 11x + 7 = 0$.

$$\Rightarrow x^2 - 11x + 7 = 0$$

* * * * *
مثال ٧ :- إذا كان $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ هما جذري المعادلة $x^2 - 5x + 6 = 0$.
كوتر المعادلة التي جذراها $d, 3$

مثال ٨ :- إذا كان $3, 2$ هما جذري المعادلة $x^2 - 5x + 6 = 0$.
كوتر المعادلة التي جذراها $d, 3$

الحل :- بفرضه أنه جذري المعادلة $x^2 - 5x + 6 = 0$.
أوجد قيمته

$$\begin{array}{l} 1 = p \\ 3 = b \\ 2 = c \end{array}$$

∴ $3 + d = 5 \Rightarrow d = 2$

$$3 + d = 5 \Rightarrow d = 2$$

∴ بفرضه أنه جذري المعادلة $x^2 - 5x + 6 = 0$.
أوجد قيمته

$$\begin{array}{l} 1 = p \\ 3 = b \\ 2 = c \end{array}$$

$$3 - d = 2 \Rightarrow d = 1$$

$$\Rightarrow (3-d) = (3-1) = 2 \Rightarrow (3-d) = 2 \Rightarrow d = 1$$

$$\Rightarrow 9 = 3^2 = 1^2 = 1 \Rightarrow 16 = 4^2 = 1^2 = 1 \Rightarrow 8 = (3+2) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8 = 1 \Rightarrow 1 = 3 + 2 = 5 \Rightarrow \boxed{c = 5}$$

مثال ٨) أوجد المعادلة التربيعية التي جذورها ضعف جذري المعادلة التربيعية

$$\begin{array}{l|l} c=p \\ \sqrt{-}=b \\ 0=q \end{array}$$

$$x^2 - 5x + 0 = 0$$

الحل :- لفرصه جذري المعادلة المعطاه هما ل، م

$$x = \frac{b}{a} = \frac{0}{1} = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow m = 0$$

$$x = \frac{c}{a} = \frac{p}{1} = p \Rightarrow x = p \Rightarrow l = p$$

∴ المعادلة المطلوبة جذورها ضعف جذري المعادلة المعطاة ∴ جذورها هم ل، م

$$I = x \times c = (m+l)c = m^2 + lc = m^2 + lp$$

$$II = \frac{c}{x} \times \frac{c}{x} = \frac{p}{l} \times \frac{p}{m} = \frac{p^2}{lm} = \frac{p^2}{mp} = p$$

$$\# \quad x^2 - 5x + 0 = 0$$

مثال ٩) أوجد المعادلة التربيعية التي كل من جذريها يزيد بقدر ١ عن كل من

$$x^2 - 5x + 9 = 0$$

الحل :- لفرصه جذري المعادلة المعطاه هما ل، م

$$\begin{array}{l|l} 1=p \\ \sqrt{-}=b \\ 9=q \end{array}$$

$$x = \frac{b}{a} = \frac{0}{1} = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow m = 0$$

$$x = \frac{c}{a} = \frac{9}{1} = 9 \Rightarrow x = 9 \Rightarrow l = 9$$

∴ المعادلة المطلوبة جذورها يزيد بقدر ١ عن جذري المعادلة المعطاه

$$\therefore \text{جذري المعادلة المطلوبة هما } l+1 \text{ و } m+1$$

$$I = c + x = 9 + x = 9 + m + l = 9 + m + 1 = m + 10$$

$$II = 1 + x + 9 = 1 + m + l + 9 = 1 + m + 1 + 9 = m + 11$$

$$\# \quad x^2 - 5x + 9 = 0$$

تأديده على "تكوينه المعادلة التوزيعية من علم جذراها"

□ اكمل ما يأتي :-

(١) المعادلة التي جذراها ٥-٣ هـ هـ

(٢) المعادلة التي جذراها ٤، ٣ هـ هـ

(٣) المعادلة التي مجموع جذريها = ٣ وحاصل ضربها = ٥ هـ هـ

(٤) إذا كان ل هـ جذرا للمعادلة $x^2 - ٥x + ٥ = ٠$ فإيه ب هـ

(٥) إذا كان ل هـ جذرا للمعادلة $x^2 - ٥x + ٥ = ٠$ فإيه ل م هـ

□ كونه المعادلة التوزيعية التي جذراها :-

(١) $x^2 - ٤x + ٤ = ٠$ (٤) $x^2 - ١x + ٣ = ٠$

(٢) $x^2 - ٤x + ٤ = ٠$ (٥) $x^2 - ٣x + ٣ = ٠$

(٣) $x^2 - ٥x + ٥ = ٠$ (٦) $x^2 - ٣x + ٣ = ٠$

□ (١) إذا كان ل هـ جذرا للمعادلة $x^2 - ٥x + ٥ = ٠$ كونه المعادلة التي جذراها ل هـ م

(٢) إذا كان ل هـ جذرا للمعادلة $x^2 - ٥x + ٥ = ٠$ كونه المعادلة التي جذراها ل م هـ

(٣) إذا كان ل هـ جذرا للمعادلة $x^2 - ٥x + ٥ = ٠$ كونه المعادلة التي جذراها ل م هـ

(٤) إذا كان ل هـ جذرا للمعادلة $x^2 - ٥x + ٥ = ٠$ كونه المعادلة التي جذراها ل م هـ

(٥) إذا كان ل هـ جذرا للمعادلة $x^2 - ٥x + ٥ = ٠$ كونه المعادلة التي جذراها ل م هـ

(٦) إذا كان ل هـ جذرا للمعادلة $x^2 - ٥x + ٥ = ٠$ كونه المعادلة التي جذراها ل م هـ

(٧) إذا كان ل هـ جذرا للمعادلة $x^2 - ٥x + ٥ = ٠$ كونه المعادلة التي جذراها ل م هـ

(٨) إذا كان ل هـ جذرا للمعادلة $x^2 - ٥x + ٥ = ٠$ كونه المعادلة التي جذراها ل م هـ

(٩) إذا كان ل هـ جذرا للمعادلة $x^2 - ٥x + ٥ = ٠$ كونه المعادلة التي جذراها ل م هـ

(١٠) إذا كان ل هـ جذرا للمعادلة $x^2 - ٥x + ٥ = ٠$ كونه المعادلة التي جذراها ل م هـ

(١١) إذا كان ل هـ جذرا للمعادلة $x^2 - ٥x + ٥ = ٠$ كونه المعادلة التي جذراها ل م هـ

(١٢) إذا كان $x^2 + 3x + 2 = 0$ هما جذرا المعادلة $x^2 - 11x + 3 = 0$ كونه المعادلة التي جذريها x, y

(١٣) إذا كان $x^2 - 2x + 1 = 0$ هما جذرا المعادلة $x^2 + 5x + 7 = 0$ كونه المعادلة التي جذريها x, y

٤ كونه المعادلة التربيعية التي كل من جذريها يساوي نصف نظيره من جذري المعادلة $x^2 - 5x + 7 = 0$

٥ كونه المعادلة التربيعية التي كل من جذريها يساوي مربع نظيره من جذري المعادلة $x^2 + 3x - 5 = 0$

٦ إذا كان x, y من جذري المعادلة التربيعية $x^2 + 3x + 2 = 0$ يساوي ضعف حاصل ضرب جذري المعادلة $x^2 + 3x + 2 = 0$ أو جذرية x, y

٧ إذا كان x, y من جذري المعادلة $x^2 - 5x + 7 = 0$ وكان x, y من جذري المعادلة $x^2 - 5x + 7 = 0$ أو جذرية كل من x, y

ثم كونه المعادلة التي جذريها $(x+y), (x-y)$

٨ إذا كان x, y من جذري المعادلة $x^2 - 3x - 7 = 0$

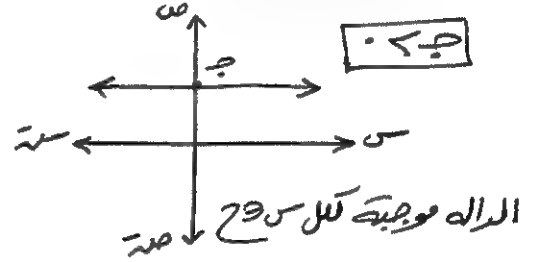
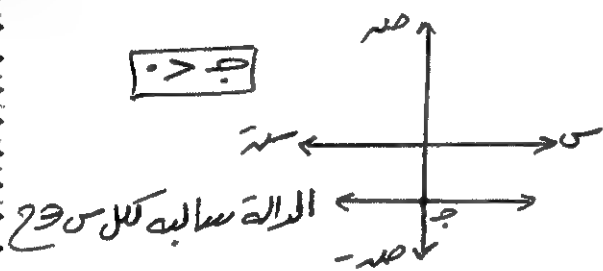
أو جذرية المعادلة التي جذريها x, y

١٦ "إشارة الدالة"

* المقصود بجث إشارة الدالة هو معرفة الفترات التي تكون فيها الدالة موجبة والفترات التي تكون فيها الدالة سالبة والفترات التي تكون فيها الدالة تساوي صفر.

أولاً: "إشارة الدالة الثابتة"

إشارة الدالة الثابتة د حيث $d > 0$ ، ج ثابت $\neq 0$. هي نفس إشارة ج لكل س و ج



مثال ١ اكتب إشارة كل من الدوال الآتية :-

(١) $d = ٥$ و (٢) $d = -٥$

(٣) $d = ٣$ و (٤) $d = -٣$

الحل :- (١) إشارة د (٥) موجبة لكل س و ج .

(٢) إشارة د (-٥) سالبة لكل س و ج .

(٣) إشارة د (٣) موجبة لكل س و ج .

(٤) إشارة د (-٣) سالبة لكل س و ج .

ثانياً: "إشارة الدالة الخطية"

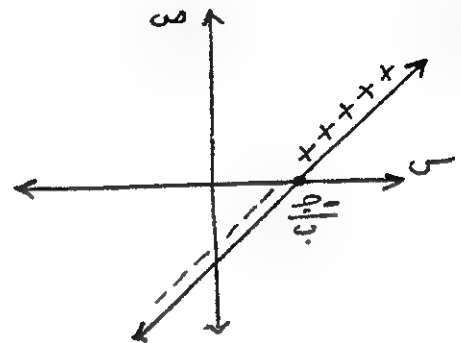
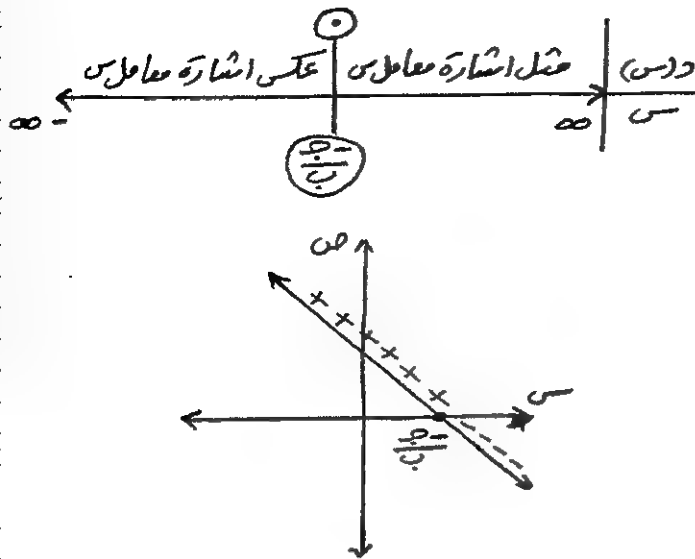
معادلة الدالة الخطية هي $د = ب س + ج$ ، $ب \neq ٠$.

بوضع د (٥) = $٥ = ب س + ج$ $\Leftrightarrow ب س = ٥ - ج$ $\Leftrightarrow س = \frac{٥ - ج}{ب}$ (ب.ب)

ولكن إشارة الدالة :-
 • د (٥) مثل إشارة معادل س عند س $\frac{٥ - ج}{ب}$ أو س $\frac{٥ - ج}{ب}$ ، $\frac{٥ - ج}{ب} > ٠$
 • د (٥) عكس إشارة معادل س عند س $\frac{٥ - ج}{ب}$ أو س $\frac{٥ - ج}{ب}$ ، $\frac{٥ - ج}{ب} < ٠$
 • عند س = $\frac{٥ - ج}{ب}$ أو س $\frac{٥ - ج}{ب}$ ، $\frac{٥ - ج}{ب} = ٠$ د (٥) = ٥

وعليه أنه لعبر عن كل ما يلي :-

والشكل التالي يوضح ذلك بيانياً :-



مثال ٥ اجبت إشارة كل من الدوال الآتية :-

(١) د(س) = ١ + س

(٢) د(س) = ٢ - س

يوضع د(س) = ٠

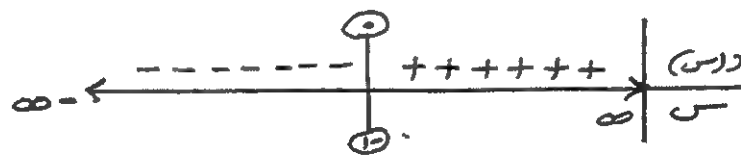
الحل :- (١) د(س) = ١ + س

١ + س = ٠ ⇒ س = -١

∴ د(س) تكون موجبة (عند إشارة معادل س) عند س < -١ أي س ∈ (-∞, -١)

د(س) سالبة (عند إشارة معادل س) عند س > -١ أي س ∈ (-١, ∞)

د(س) = ٠ عند س = -١ أي س ∈ {-١}

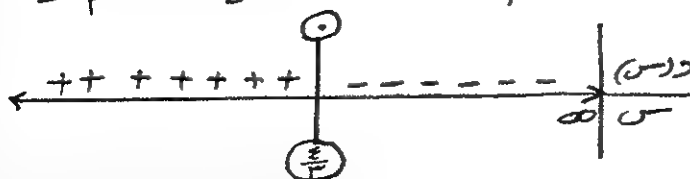


(٢) ∴ د(س) = ٢ - س ⇒ يوضع د(س) = ٠ ⇒ ٢ - س = ٠ ⇒ س = ٢

∴ د(س) سالبة (عند إشارة معادل س) عند س < ٢ أي س ∈ (-∞, ٢)

د(س) موجبة (عند إشارة معادل س) عند س > ٢ أي س ∈ (٢, ∞)

د(س) = ٠ عند س = ٢



* * * ترتيب * * *
اجتبه إشارة كل عدد الدوال الآتية :-

(1) $(دس) = س - ٣$ (2) $(دس) = ١ - س$

ثالثاً :- "إشارة الدالة التربيعية"

لتعبير إشارة الدالة التربيعية $(دس) = اس^٢ + بس + ج$. $٢ \neq ٠$

نوجد مميز المعادلة $اس^٢ + بس + ج = ٠$ وهو $ب^٢ - ٤اج$ فإذا كانه :-

١) $ب^٢ - ٤اج < ٠$ فإنه يكونه للمعادلة جذور حقيقية غير حقيقية ولفرضه أن $ل١$ و $ل٢$ $ل١ > ل٢$ وتكونه إشارة الدالة كما يلي :-

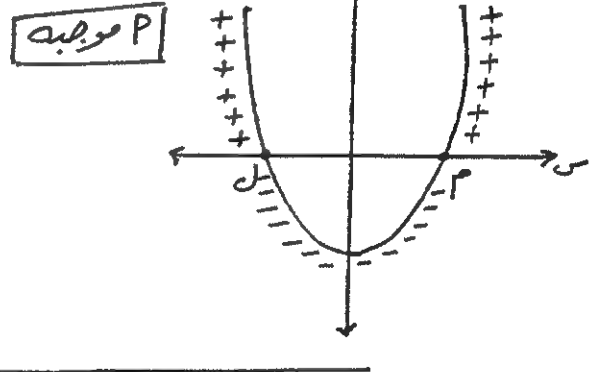
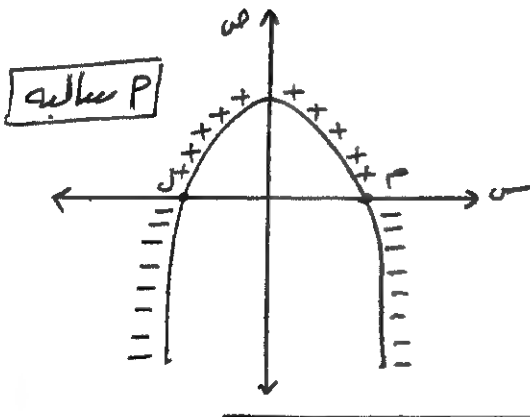
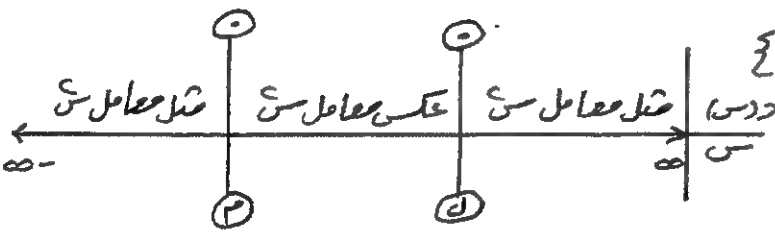
• $(دس)$ مثل إشارة معامل $س$ عندما $س \in [ل١, ل٢]$

• $(دس)$ عكس إشارة معامل $س$ عندما $س \in [ل٢, ل١]$

• $(دس) = ٠$ عندما $س \in [ل١, ل٢]$

وعليه أنه نعتبر عنظر كما يلي :-

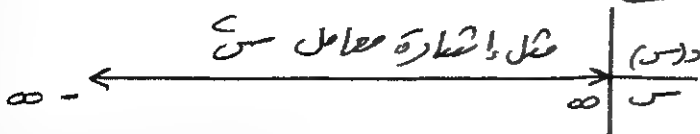
والعقل المقابل يوضع ذلك بيانياً :-

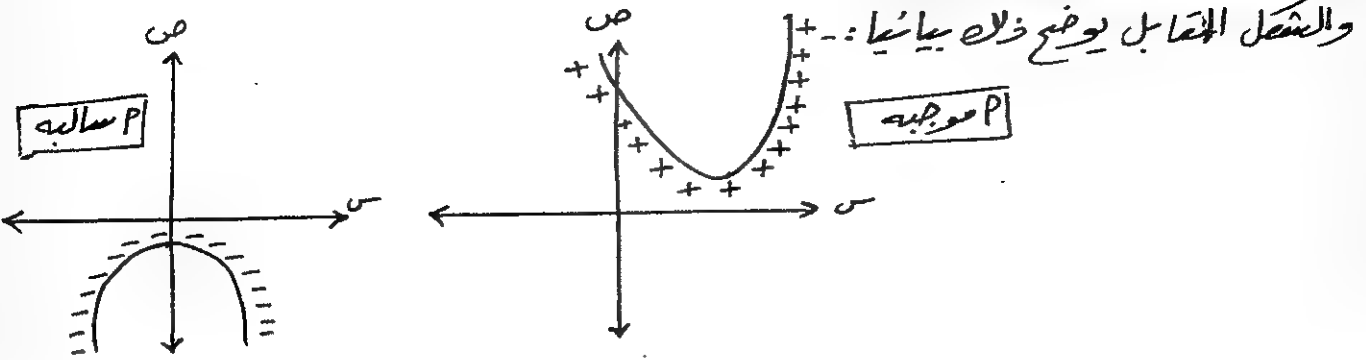


٢) $ب^٢ - ٤اج > ٠$ فإنه لا توجد جذور حقيقية للمعادلة وتكونه إشارة الدالة كما يلي :-

• $(دس)$ مثل إشارة معامل $س$ لكل $س \in \mathbb{R}$

وعليه أنه نعتبر عنظر كما يلي :-

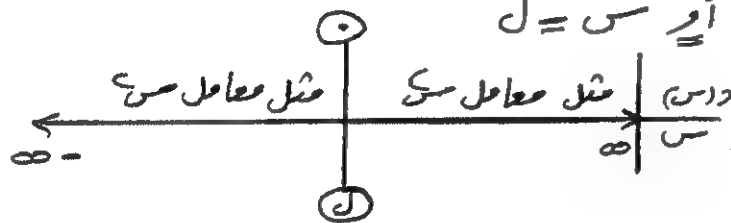




← (٣) $\Delta - 4P < 0$. فإنه يكون للمعادلة جذران حقيقيين متساويين ويكون عدد أن كل من u و v يساوي l وبالتالي تكون إشارة الدالة كما يلي :-

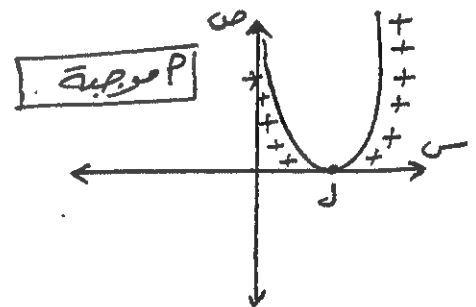
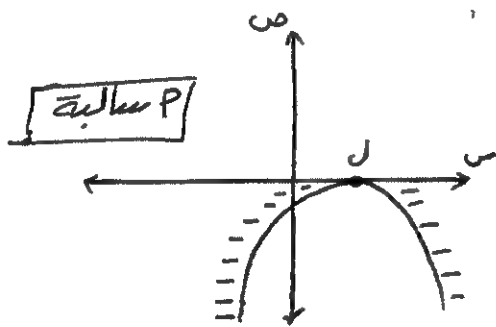
• (درج) مثل إشارة معامل S عند $S = 0$ - l أو $S = l$

• (درج) $= 0$ عند $S = 0$ أو $S = l$



وبذلك أنه نضع عنها كما يلي :-

والشكل المقابل يوضح ذلك بيانياً :-



مثال (٥) عيبر إشارة كل من الدوال الآتية :-

(١) (درج) $= S^2 - 5S + 6$ (٢) (درج) $= S^2 - 8S + 16$

(٣) (درج) $= S^2 + S + 1$

الحل :- (١) (درج) $= S^2 - 5S + 6$

$\Delta - 4P < 0$ $= 25 - 24 = 1 > 0$ $= 1 \times 1 - 0 = 1 > 0$

∴ الجذرين حقيقيين مختلفين ← نوجد لها و ذلك بوضع (درج) $= 0$

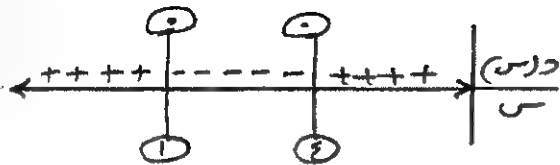
$1 = P$
 $0 = \Delta$
 $1 = \Delta$

$$\boxed{1=s} \text{ أو } \boxed{2=s} \Leftarrow 0 = (1-s)(2-s) \Leftarrow s = 1 \text{ أو } s = 2$$

∴ (دس) تكون موجبة (مثل) عندما $s \in [1, 2]$

(دس) تكون سالبة (عكس) عندما $s \in]2, 1[$

(دس) = 0 عندما $s \in \{1, 2\}$



وتكتبه تحديداً على خط الأعداد ←

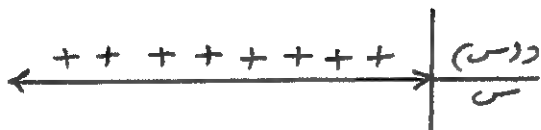
$$\begin{array}{l} 1 = p \\ 1 = 0 \\ 1 = 0 \end{array}$$

$$(2) \text{ (دس) } = s - s + 1$$

$$\therefore 0 > 3 - 1 = 2 = 1 \times 1 \times 2 - 1 = p \times 2 - 1$$

∴ المعادلة ليس لها جذور حقيقية

∴ (دس) تكون موجبة لكل $s \in \mathbb{R}$



$$1 = p$$

$$8 = 0$$

$$16 = 0$$

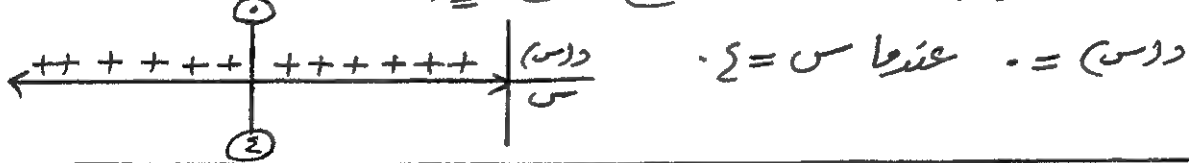
$$(3) \text{ (دس) } = s^2 - 8s + 16$$

$$\therefore 0 > 64 - 64 = 0 = 16 \times 1 \times 2 - 64 = p \times 2 - 64$$

∴ المعادلة لها جذور حقيقية متساوية $s = 4$ نوجد لها ذللاً بوضع (دس) = 0

$$\boxed{2=s} \Leftarrow 0 = (2-s)(2-s) \Leftarrow s = 2$$

∴ (دس) تكون موجبة عندما $s \in]2, 2[$ أو $s \neq 2$



* * * نكتبه تحديداً * * * اكتب إشارة كل حد الحدود الآتية ∴

$$(1) \text{ (دس) } = s^2 - 3s + 10$$

$$(3) \text{ (دس) } = 10 - 10s + 5s^2$$

$$(2) \text{ (دس) } = 3s - s^2$$

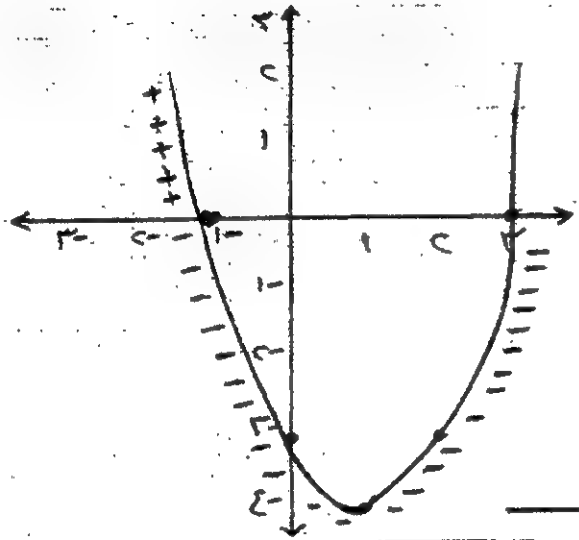
مثال ② :- مثل بيانياً د حيث $د(س) = س - س - ٣$ ثم عيبر عدد الرسم إشارة الدالة
الحل :- يمكنه إيجاد نقطة رأس المنحنى طالما لا يوجد فترة التقعر فيه

$$\text{الاحداثى السينى} = \frac{س}{١ \times س} = \frac{س}{س}$$

$$\text{الاحداثى الصادى} = د(س) = (س - س - ٣) = (١) = ٣ - ١ - ٣ = -١$$

∴ نقطة رأس المنحنى هي (١، -١) يمكنه عمل جدول كما يلي .

س	-١	٠	①	٢	٣
د(س)	٠	-٣	②	-١	٠



عدد الرسم نلاحظ أنه :-

د(س) موجبة عندما $س < -١$ و $س > ٣$ [٣، -١]

د(س) سالبة عندما $-١ < س < ٣$]٣، -١]

د(س) = ٠ عندما $س = -١$ و $س = ٣$]٣، -١]

مثال ③ :- اثبت أنه لجميع قيم س $س > ٠$ يكون جذر المعادلة $س - س - ٣ = ٠$ حقيقيين مختلفين .

الحل :- يكون للمعادلة جذرين حقيقيين مختلفين إذا كان المميز $ب^٢ - ٤٠٠ > ٠$

$$٠ < ٤٠٠ - ب^٢ = ٤٠٠ - (س - س - ٣)^٢ = ٤٠٠ - (س^٢ - ٦س + ٩) = ٣٩٠ - س^٢ + ٦س$$

$$٣٩٠ - س^٢ + ٦س > ٠$$

$$٣٩٠ > س^٢ - ٦س$$

$$٣٩٠ > س(س - ٦)$$

$$٣٩٠ > س(س - ٦) \Rightarrow ٣٩٠ > س^٢ - ٦س$$

$$٣٩٠ > س(س - ٦) \Rightarrow ٣٩٠ > س^٢ - ٦س$$

∴ المعادلة لها جذران حقيقيين مختلفين

* * * تدريب * * * اثبت أنه لجميع قيم س $س > ٠$ يكون جذر المعادلة $س - س - ٣ = ٠$ حقيقيين مختلفين .

تمارين على "إشارة الدالة"

■ أمل ما يأتي :-

- (١) الدالة $D(x) = -x + 5$ إشارة ... في ...
- (٢) الدالة $D(x) = x - 2$ موجبة في الفترة ... وسالبة في الفترة
- (٣) الدالة $D(x) = x^2 - 3x$ موجبة في الفترة ... وسالبة في الفترة
- (٤) الدالة $D(x) = x^2 - 6x + 9$ موجبة في الفترة
- (٥) الدالة $D(x) = (x-1)(x+2)$ موجبة في الفترة
- (٦) الدالة $D(x) = (x-3)^2$ تكون موجبة لجميع قيم x عدا
- (٧) الدالة $D(x) = x^2$ تكون موجبة في الفترة

(٨) في الشكل المقابل : دالة من الدرجة الأولى

د(س) موجبة في الفترة وسالبة في الفترة

(٩) في الشكل المقابل : دالة من الدرجة الثانية

د(س) = 0 عند $x = 3$

د(س) < 0 عند $x = 3$

د(س) > 0 عند $x = 3$

■ ابحث إشارة كل من الدوال الآتية :-

(٩) د(س) = x^2

(٥) د(س) = $x + 5$

(١) د(س) = $x - 2$

(١٠) د(س) = $(x-2)(x+3)$

(٦) د(س) = $x^2 - 3x + 2$

(٢) د(س) = x^2

(١١) د(س) = $(x-3)^2$

(٧) د(س) = $x^2 - 8x + 16$

(٣) د(س) = $x^2 - 3x$

(١٢) د(س) = $x^2 - 1$

(٨) د(س) = $x^2 - 10x + 25$

(٤) د(س) = $x^2 - 3x$

■ (١) ارسم مخطط الدالة د(س) = $x^2 - 9$ في الفترة $[-3, 6]$ وعلل الرشح ابحث إشارة الدالة

(١) اسم مفتاح الدالة $D(S) = S + S + S$ في الفترة $[56, 3]$ والبحث إشارة S

❑ إذا كانت $D(S) = S - 9$ ، $S = 1$. أو هذه الفترة التي

تكونه في S ، ولها نفس الإشارة

❑ إذا كانت $D(S) = S + 1$ ، $S = 1$ في هذه الفترة التي

تكونه في S ، ولها نفس الإشارة

❑ إذا كانت $D(S) = S - 3$ ، $S = 6$ في $D(S) = S - 6$ - 7

وكانت $D(S) = D(S) = 0$. البحث إشارة $D(S)$

❑ أثبت أنه لجميع قيم S يكون هذا العارلة $S + S + S = 0$.

فقط في مختلفه .

❑ في الفترة من عام ١٩٩٠ إلى ٢٠١٠ كان إنتاج أستراليا من الذهب مقدراً بالآلاف

أوقية يتحدد بالدالة $D(S) = 100 - 96S + 10S^2$ حيث S عدد السنوات

، $D(S)$ إنتاج الذهب .

أولاً :- البحث إشارة دالة الإنتاج D .

ثانياً :- خلال الأعوام من ١٩٩٠ إلى ٢٠١٠ في أي الأعوام كان إنتاج الذهب يتناقص ؟

ثالثاً :- خلال الأعوام من ١٩٩٠ إلى ٢٠١٠ في أي الأعوام كان إنتاج الذهب يتزايد ؟

(٧) "متباينة الدرجة الثانية من مجهول واحد"

* نعلم أن حل متباينة الدرجة الأولى من مجهول واحد يعني أنه توجد جميع قيم المجهول الذي يحقق هذه المتباينة من صورة فترة .

* حل المتباينة التربيعية :- يعني إيجاد جميع قيم المجهول التي تحقق هذه المتباينة في خطوات حل متباينة الدرجة الثانية من مجهول واحد :-

(١) نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بهذه المتباينة .

(٢) ندرس إشارة الدالة التربيعية ونضرب على خط الأعداد .

(٣) نحدد الفترات التي تحقق المتباينة .

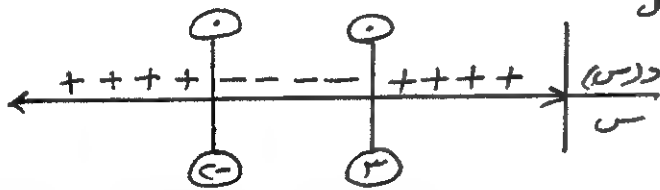
مثال ١ :- حل المتباينة $x^2 - 6x + 9 < 0$.

الحل :- الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة هي $D(x) = x^2 - 6x + 9$.
نبحث إشارة هذه الدالة كما سجد شرحه في الدرس السابق

نضع $D(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 = 0 \Rightarrow (x-3)^2 = 0$

ومنظر $\boxed{x=3}$ ، $\boxed{x=3}$ ونلاحظ أنه الجذرين حقيقيين مختلفين

∴ $D(x)$ تكون إشارة على كالمين في الشكل



عبر الرسم :-

مجموعة حل المتباينة $=]- \infty, 3[\cup] 3, + \infty[$

أو $]-\infty, 3[\cup] 3, +\infty[$ وهذه الفترة هي التي تحقق

مثال ٢ حل المتباينة $(x-1)^2 \geq 0$

الحل :- $(x-1)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 \geq 0$

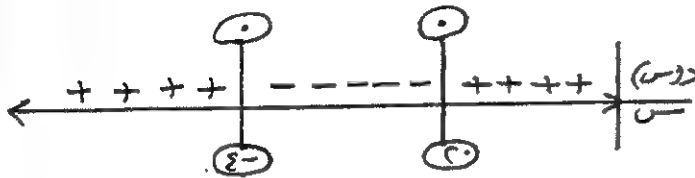
$$\therefore -s - c + 1 \geq 9 - 2s \Leftrightarrow s \leq c + 8$$

∴ الدالة التربيعية المرتبطة بالمعادلة لها دس $-s - c + 8 = 0$

$$\therefore -s - c + 8 = 0 \Rightarrow 26 = c + s = 8 - x \times 2 - 2 = 0$$

"المميز له قيمتان مختلفتان"

$$\text{بوضع دس} = 0 \Leftrightarrow -s - c + 8 = 0 \Rightarrow (s + c)(c - 8) = 0$$



$$\text{ومنها } \boxed{s = -8} \text{ و } \boxed{c = 8}$$

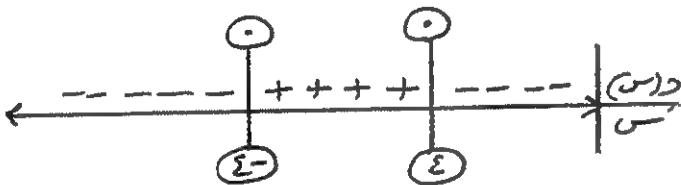
∴ دس تكون دشار على كالمين بالشكل

$$\therefore \text{مجموعة حل المعادلة} = [-8, 8]$$

$$\text{مثال ٣:} \therefore \text{حل المعادلة } 16 = s$$

الحل: ∴ الدالة المرتبطة بالمعادلة لها دس $16 = s$

$$\text{بوضع دس} = 0 \Leftrightarrow 16 = s \Rightarrow 1 - x \Rightarrow s = 16 - c \Rightarrow (s + c)(c - 16) = 0$$



$$\text{ومنها } \boxed{s = -16} \text{ و } \boxed{c = 16}$$

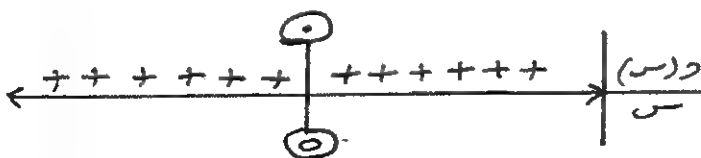
∴ دس تكون دشار على كالمين بالشكل

$$\therefore \text{مجموعة حل المعادلة} = [-16, 16]$$

$$\text{مثال ٤:} \therefore \text{حل المعادلة } 20 = s + c$$

$$\text{الحل:} \therefore 20 = s + c \Rightarrow 1 - x \Rightarrow s = 20 - c$$

$$\therefore \text{الدالة التربيعية لها دس} = 20 = s + c \Rightarrow (s - 20)(c - 20) = 0$$



$$\text{ومنها } \boxed{s = -20}$$

∴ دس تكون دشار على كالمين بالشكل

$$\therefore \text{مجموعة حل المعادلة} = [-20, 20]$$

مثال ٥ :- حل المتباينة $x^2 + 2 < 0$

الحل :- الدالة التربيعية لها $(x) = x^2 + 2$

$\therefore x^2 + 2 = 0 \Rightarrow x^2 = -2 \Rightarrow x = \pm \sqrt{-2}$ الجذور غير حقيقية

$\therefore (x)$ تكون إشارتها كما بالمثل $\frac{(x)}{x}$

مجموعة حل المتباينة $x = \emptyset$

ما التفسير الذي يجب فعله من المتباينة السابقة متى أصبح $x = 0$ ؟

تمارين على "متباينة الدرجة الثانية من مجهول واحد"

١ حل المتباينات الآتية

- (١) $x^2 + 5x - 8 < 0$
- (٢) $x^2 - 1 \geq 0$
- (٣) $x^2 + 7x - 6 > 0$
- (٤) $x^2 - 4x + 4 \leq 0$
- (٥) $x^2 - 5x > 0$
- (٦) $x^2 \geq 9$
- (٧) $x^2 - 3 \geq 11x$
- (٨) $x^2 - 3 - 5x \leq 0$
- (٩) $x^2 + 5 \geq 1$
- (١٠) $x(x + 5) - 3 \geq 0$
- (١١) $x^2 + 3 > 10 - 3(x + 3)$
- (١٢) $0 - 5 \geq x^2$
- (١٣) $x^2 \leq 6 - 9$
- (١٤) $0 - 5 \geq (x - 5)^2$
- (١٥) $x^2 + 1 > 5(x - 1)$

تعاريف عامة

أولاً: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

- ١) مجموعة حل المعادلة $x^2 - 6x + 9 = 0$ في ح هي:

أ. $\{3\}$ ب. $\{2\}$ ج. $\{2, 3\}$ د. \emptyset
- ٢) مجموعة حل المعادلة $x^2 + 4 = 0$ هي:

أ. $\{2\}$ ب. $\{2\}$ ج. $\{2, -2\}$ د. $\{2, -2, 2\}$
- ٣) أبسط صورة للمقدار $(1 - t)^4$ هو:

أ. -4 ب. 4 ج. $-4t$ د. $4t$
- ٤) إذا كان جذرا المعادلة $x^2 - 4x + k = 0$ حقيقيين ومختلفين فإن:

أ. $k < 4$ ب. $k > 4$ ج. $k = 4$ د. $k \leq 4$
- ٥) إذا كان جذرا المعادلة $x^2 - 12x + m = 0$ متساويين فإن م تساوي:

أ. 36 ب. -1 ج. 6 د. 36
- ٦) المعادلة التربيعية التي جذراها $2 - 3t$ ، $2 + 3t$ هي:

أ. $x^2 + 4x + 13 = 0$ ب. $x^2 - 4x + 13 = 0$ ج. $x^2 + 4x - 13 = 0$ د. $x^2 - 4x - 13 = 0$
- ٧) إذا كانت د: $[-2, 4]$ ← ح حيث د(س) = $2 - s$ فإن إشارة الدالة د سالبة في:

أ. $[-2, 2]$ ب. $[2, 4]$ ج. $[4, 2]$ د. $[2, 4]$
- ٨) إذا كان أحد جذري المعادلة $x^2 - (2 + m)x + 3 = 0$ معكوساً جمعياً للجذر الآخر فإن م تساوي:

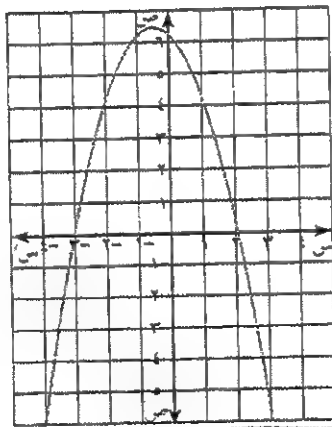
أ. -3 ب. -2 ج. 2 د. 3
- ٩) إذا كان أحد جذري المعادلة $x^2 + 7x + k = 0$ هو المعكوس الضربي للجذر الآخر فإن ك تساوي:

أ. -7 ب. -2 ج. 2 د. 7
- ١٠) مجموعة حل المتباينة $x^2 + s - 2 > 0$ هي:

أ. $[-2, 1]$ ب. $[-1, 2]$ ج. $[-2, 1]$ د. $[-1, 2]$

ثانياً: يمثل الشكل المقابل التمثيل البياني لدالة تربيعية د

١١) أكمل ما يأتي:



- أ. مدى الدالة د هو
- ب. القيمة العظمى للدالة د =
- ج. نوع جذري المعادلة د(س) = ٠ هو
- د. مجموعة حل المعادلة د(س) = ٠ هي
- هـ. د(س) < ٠ عندما س ⊃
- و. د(س) > ٠ عندما س ⊃
- ز. د(س) = ٠ عندما س =

تمارين عامة

١٢ اكتب قاعدة الدالة التي تمر بالنقاط $(١, ٢)$ ، $(٠, ٢)$ ، $(٠, ٣)$

١٣ تفكير ناقد:

أ اكتب نقاط تقاطع منحنى الدوال التي قاعدتها $ص = س^٢$ ، $ص = س$

ب اكتب نقاط تقاطع منحنى الدوال التي قاعدتها $ص = -س^٢$ ، $ص = -س$ ماذا تلاحظ؟ فسر إجابتك.

ثالثاً: أجب عن الأسئلة الآتية

١٤ بين نوع جذرى كل معادلة مما يأتي، ثم أوجد مجموعة حل كل معادلة.

أ $س^٢ - ٢س = ٠$ ب $(س - ١)^٢ = ٤$ ج $س^٢ - ٦س + ٩ = ٠$

د $س^٢ + ٣س - ٢٨ = ٠$ هـ $٦س(س - ١) = ٦ - س$

١٥ حل المعادلات الآتية باستخدام القانون العام مقرباً الناتج لأقرب رقمين عشريين.

أ $س^٢ + ٤س + ٢ = ٠$ ب $س^٢ - ٣(س - ٢) = ٥$

١٦ أوجد مجموعة حل المعادلات الآتية في مجموعة الأعداد المركبة.

أ $س^٢ + ٩ = ٠$ ب $س^٢ + ٢س + ٢ = ٠$ ج $س^٢ + ٤س + ٥ = ٠$

١٧ أوجد قيمة أ، ب في كل مما يأتي:

أ $(٣ - ٧) - (٢ + ت) = أ + ب ت$ ب $(٥ - ٢)(٣ + ت) = أ + ب ت$
ج $أ + ب ت = \frac{١}{٢ + ت}$ د $أ + ب ت = \frac{٦ - ٤}{٢ - ت}$

١٨ أوجد قيمة م في كل مما يأتي:

أ إذا كان جذرا المعادلة $س^٢ + م س + ١٨ = ٠$ متساويين

ب إذا كان أحد جذرى المعادلة $س^٢ + ٣س + ك = ٠$ ضعف الجذر الآخر

١٩ ابحث إشارة الدالة د في كل مما يأتي:

أ د(س) = $س^٢ - ٢س - ٨$ ب د(س) = $٤ - ٣س - س^٢$

٢٠ أوجد مجموعة الحل لكل من المتباينات الآتية:

أ $س^٢ - س - ١٢ < ٠$ ب $س^٢ - ٧س + ١٠ \geq ٠$

اختبار الوحدة

أولاً: الاختيار من متعدد :

١. مجموعة حل المعادلة $s^2 - 4s - 4 = 0$ في ح هي:

أ $\{2\}$ ب $\{2\}$ ج $\{-2, 2\}$ د \emptyset
٢. حل المتباينة $s^2 + 9 < 6s$ في ح هي:

أ ح ب ح - $\{2\}$ ج $[-2, 3]$ د ح - $[-3, 2]$
٣. جذرا المعادلة $s^2 - 5s + 3 = 0$:

أ حقيقتان متساويتان ب حقيقتان مختلفتان ج مركبان د مركبان ومترافقان
٤. المعادلة التربيعية التي جذراها $(1 + t)$ ، $(1 - t)$ هي:

أ $s^2 - 2s + 2 = 0$ ب $s^2 + 2s - 2 = 0$ ج $s^2 + 2s + 2 = 0$ د $s^2 - 2s - 2 = 0$

ثانياً: أجب عن الأسئلة الآتية

٥. إذا كان $(3 + i)s^2 + (1 - 2)s + 4 = 0$ فأوجد قيمة i في كل من الحالات الآتية:

أ أحد جذري المعادلة معكوس جمعي للجذر الآخر.

ب مجموع جذري المعادلة يساوي ٦.

٦. أ إذا كان $\frac{2}{m}$ ، $\frac{2}{n}$ هما جذرا المعادلة $s^2 - 6s + 4 = 0$ فأوجد المعادلة التي جذراها ل، م.

ب ابحث إشارة الدالة د، حيث $D(s) = 8 - 2s - s^2$

٧. أ أثبت أن جذري المعادلة $s^2 + 3 = 5s$ حقيقتان مختلفتان، ثم أوجد مجموعة حل المعادلة في ح مقرباً الناتج لأقرب ثلاثة أرقام عشرية.

ب أوجد حل المتباينة: $s^2 - 5s - 14 \geq 0$

٨. تطبيقات فيزيائية: أطلق صاروخ رأسياً إلى أعلى بسرعة ٩٨ متر/ثانية، إذا كانت العلاقة بين المسافة المقطوعة ف بالمرث والزمن ن بالثانية تعطى بالعلاقة: $F = 98 - 4.9N$ ، فأوجد:

أ المسافة التي يقطعها الصاروخ في ثانيتين.

ب الزمن الذي يستغرقه الصاروخ حتى يقطع مسافة ٤٧٠،٤ مترًا. بما تفسر وجود إجابتين؟

اختبار تراكمي

١ أوجد قيمة ك التي تجعل للمعادلة $س^٣ + ٤س + ك = ٠$ جذرين :

- أ حقيقيين متساويين
 ب حقيقيين مختلفين
 ج مركبين

٢ أوجد قيمة ك التي تجعل:

- أ أحد جذري المعادلة $س^٢ - كس + ك + ٢ = ٠$ ضعف الجذر الآخر.
 ب أحد جذري المعادلة $س^٢ - كس + ٨ = ٠$ يزيد عن الجذر الآخر بمقدار ٢.
 ج أحد جذري المعادلة $س^٢ - كس + ٣ = ٠$ يزيد عن المعكوس الضربي للجذر الآخر بمقدار ١.

٣ إذا كان ل، م جذري المعادلة $س^٢ - ٣س + ٢ = ٠$ فأوجد معادلة الدرجة الثانية التي جذراها:
 أ $س^٢ - ٣س + ١ = ٠$ ب $س^٢ - ٤س + ١ = ٠$ ج $س^٢ - ٥س + ١ = ٠$ د $س^٢ - ٦س + ١ = ٠$

٤ إذا كان $\frac{1}{ل}, \frac{1}{م}$ هما جذرا المعادلة $س^٦ - ٥س + ١ = ٠$ فكون المعادلة التريعية التي جذراها ل، م.

- ٥ ارسم منحنى الدالة د، حيث د(س) = $س^٢ - ٤$ في الفترة $[-٣, ٣]$ ومن الرسم عين إشارة د في هذه الفترة.
 ٦ ارسم منحنى الدالة د، حيث د(س) = $٦ - ٥س - ٤س^٢$ في الفترة $[-٣, ٢]$ ومن الرسم عين إشارة د في هذه الفترة.
 ٧ أوجد مجموعة الحل للمتباينات التريعية الآتية:

- أ $س^٢ + ٤س + ٤ > ٠$ ب $س^٢ - ٦س - ٥ < ٠$ ج $(س - ٢)^٢ \leq ٩$
 د $٣ - ٢س \leq ٢س$ هـ $س^٢ \geq ١٠س - ٢٥$ و $٢س^٢ - ٧س \geq ١٥$

٨ أعمال تجارية: إذا كان عدد الوحدات المنتجة والمباعة من سلعة معينة في الأسبوع هي س مليون وحدة وكان سعر بيع الوحدة هو ع حيث $ع = ٢ - س$ ، إذا كانت التكاليف الكلية اللازمة لإنتاج س مليون وحدة في الأسبوع تعطى بالعلاقة $ت = (٣, ٥ + ٠, ٥س)$ مليون وحدة فأوجد:

- أ دالة الإيراد الكلي (د)
 ب دالة الربح (ر)
 ج أوجد س عند مستوى ربح ٢, ٠ مليون جنيه.
 ٩ إذا كانت $١ = ٣٦ + ت$ ، $ب = -١ - ت$ ، $ج = -٢ - ٣٦ + ت$ فأثبت أن: $ج - ب = (١ - ب) ت$

الإيداع

في الرياضيات

ثانياً:

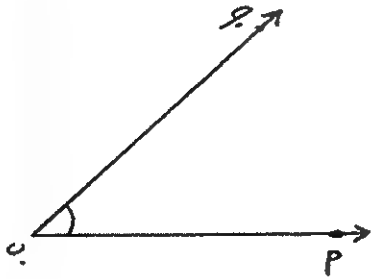
حساب المثلثات

الوحدة الثانية

- (١) الزاوية الموجهة
- (٢) القياس الستيني والقياس الدائري للزاوية
- (٣) الدوال المثلثية
- (٤) الزوايا المنتسبة
- (٥) التمثيل البياني للدوال المثلثية
- (٦) إيجاد قياس زاوية بمعلومية احدي نسبها المثلثية

تمارين عامة علي الوحدة اختبار الوحدة

١٠، الزاوية الموجهة



نعلم أنه: الزاوية هي اتحاد شعاعين لهما نفس نقطة البداية.

* من الشغل المقابل: نسمي النقطة ب رأس الزاوية

والشعاعين \vec{BP} ، \vec{BQ} ضلع الزاوية

أي أنه $\vec{BP} \wedge \vec{BQ} = \angle P B Q$. وعليه قرأنا $\angle P B Q$

← القياس السمين للزاوية :-

وأساسة تقسيم الدائرة إلى ٣٦٠ قوسًا متساوية من الطول وعليه يكون أي زاوية

مركزة يمر ضلعها بنهايتي هذا القوس يكون قياسه درجة واحدة (١°)

← اجزاء الدرجة هي: - الدقيقة (١') ، الثانية (١'')

حيث $1' = 60''$ ، $1'' = 60'''$

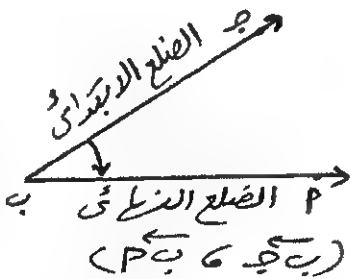
* الزاوية الموجهة :-

إذا أخذنا من الاعتبار ترتيب ضلعي الزاوية بحيث يكون إحداهما هو الضلع الابتدائي

والآخر هو الضلع النهائي في هذه الحالة تكتب الزاوية على هيئة زوج مرتب

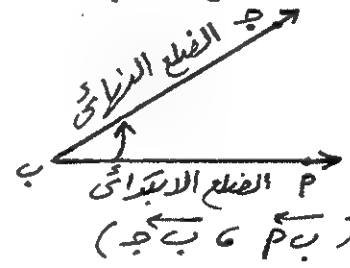
مستقيمة الأول هو الضلع الابتدائي ومستقيمة الثاني هو الضلع النهائي .

* من الشغل المقابل :-



(\vec{BP} ، \vec{BQ})

ونقرأ $\angle P B Q$ الموجهة



(\vec{BP} ، \vec{BQ})

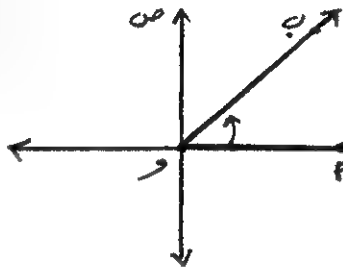
ونقرأ $\angle P B Q$ الموجهة

ملاحظة: (\vec{BP} ، \vec{BQ}) \neq (\vec{BQ} ، \vec{BP}) وبالتالي $\angle P B Q$ الموجهة $\neq \angle Q B P$ الموجهة

* تعريف:- الزاوية الموجبة :- هو زوج مرتب من اتحاد شعاعين لهما نفس نقطة البداية حيث يسى الشعاعين هما الزاوية ، نقطة البداية هما رأس الزاوية .

* الوضع القياس للزاوية الموجبة :- تكون الزاوية الموجبة في وضع القياس إذا كان :-

(١) رأسها نقطة الأصل لنظام إحداثي متعامد
(٢) ضلعها الابتدائي ينطبق على الاتجاه الموجب لمحور السينات
في الشكل المقابل :- $\angle POB$ زاوية موجبة في الوضع القياس .

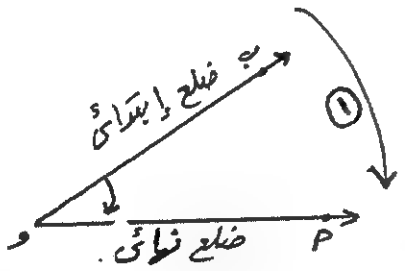


* القياس الموجب والقياس السالب للزاوية الموجبة :-

(I) يكون قياس الزاوية الموجبة موجباً إذا كان الاتجاه من الضلع الابتدائي إلى الضلع النهائي في عكس اتجاه دوران عقارب الساعة .

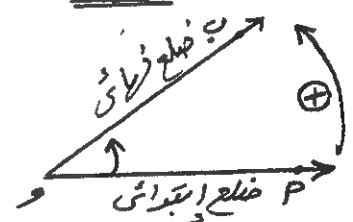
(II) يكون قياس الزاوية الموجبة سالباً إذا كان الاتجاه من الضلع الابتدائي إلى الضلع النهائي مع اتجاه دوران عقارب الساعة .

* في الشكل المقابل :-



$$\angle POB = (\text{وسج} \angle \text{وسج} P)$$

قياسها موجب لأنه الدوران من الضلع الابتدائي إلى النهائي مع اتجاه حركة عقارب الساعة



$$\angle POB = (\text{وسج} P \text{ وسج} \angle)$$

قياسها موجب لأنه الدوران من الضلع الابتدائي إلى النهائي عكس اتجاه حركة عقارب الساعة

ملاحظة هامة

(١) كل زاوية موجهة في الوضع القياس قياسها إما حادها موجب والآخر سالب بحيث يكون مجموع القيمة المطلقة كل منهما $= 360^\circ$.

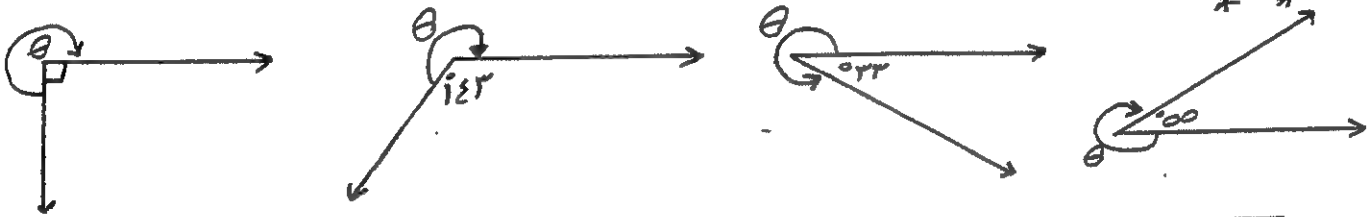
(٢) إذا كان θ هو القياس الموجب لزاوية موجهة فإما القياس السالب لها هو $(360 - \theta)$

وإذا كان $-\theta$ هو القياس السالب لزاوية موجهة فإما القياس الموجب لها هو $(360 - \theta)$

مثلاً :- إذا كان قياس الزاوية $= 120^\circ$ فإما القياس السالب لها $= 360 - 120 = 240^\circ$

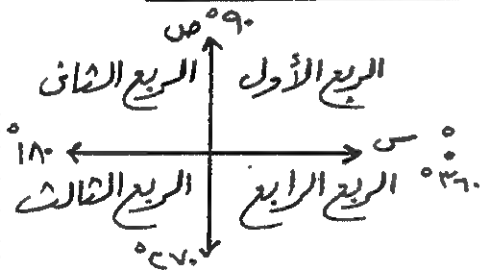
وإذا كان قياس الزاوية $= -30^\circ$ فإما القياس الموجب لها $= 360 - 30 = 330^\circ$

* تدوين * أوجد قياس الزاوية θ الموجهة في كل من الأشكال الآتية :-

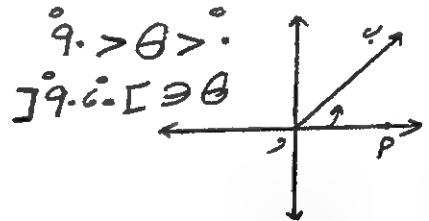


* موقع الزاوية في المستوى الإحداثي المتعامد :-

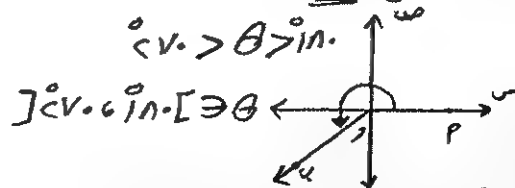
من الشكل المقابل :- يُقسَّم المستوى إلى أربعة أرباع.



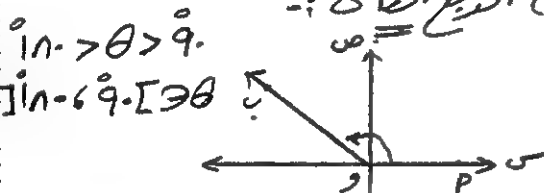
(١) الربع الأول :-



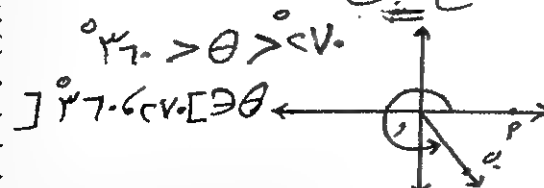
(٢) الربع الثالث :-



(٣) الربع الثاني :-



(٤) الربع الرابع :-



هــ "ملحوظة" إذا وقع الضلع النشط في زاوية على أحد محوري الإحداثيات قسم الزاوية من هذه

الحالة بالزاوية الربعية وهذه الزوايا هي: 0° ، 90° ، 180° ، 270° ، 360°

مثال ① :- عيـد الربع الذي تقع فيه كل من الزوايا الآتية :-

30° ، 45° ، 60° ، 75° ، 90° ، 105° ، 120° ، 135° ، 150° ، 165° ، 180° ، 195° ، 210° ، 225° ، 240° ، 255° ، 270° ، 285° ، 300° ، 315° ، 330° ، 345° ، 360°

الحل :- * 30° ← $0^\circ < 30^\circ < 90^\circ$ ∴ تقع في الربع الأول

* 45° ← $0^\circ < 45^\circ < 90^\circ$ ∴ تقع في الربع الأول

* 60° ← $0^\circ < 60^\circ < 90^\circ$ ∴ تقع في الربع الأول

* 75° ← $0^\circ < 75^\circ < 90^\circ$ ∴ تقع في الربع الأول

* 90° ← زاوية ربعية

* * * * * عيـد الربع الذي تقع فيه كل من الزوايا الآتية :-

19° ، 30° ، 45° ، 60° ، 75° ، 90° ، 105° ، 120° ، 135° ، 150° ، 165° ، 180° ، 195° ، 210° ، 225° ، 240° ، 255° ، 270° ، 285° ، 300° ، 315° ، 330° ، 345° ، 360°

* الزوايا المتكافئة :- عند رسم زاوية موجبة (هـ) من الوضع القياسي فإن

جميع الزوايا التي قياسها 0° ، 360° ، 720° ، 1080° ، 1440° ، 1800° ، 2160° ، 2520° ، 2880° ، 3240° ، 3600° ، 3960° ، 4320° ، 4680° ، 5040° ، 5400° ، 5760° ، 6120° ، 6480° ، 6840° ، 7200° ، 7560° ، 7920° ، 8280° ، 8640° ، 9000° ، 9360° ، 9720° ، 10080° ، 10440° ، 10800° ، 11160° ، 11520° ، 11880° ، 12240° ، 12600° ، 12960° ، 13320° ، 13680° ، 14040° ، 14400° ، 14760° ، 15120° ، 15480° ، 15840° ، 16200° ، 16560° ، 16920° ، 17280° ، 17640° ، 18000° ، 18360° ، 18720° ، 19080° ، 19440° ، 19800° ، 20160° ، 20520° ، 20880° ، 21240° ، 21600° ، 21960° ، 22320° ، 22680° ، 23040° ، 23400° ، 23760° ، 24120° ، 24480° ، 24840° ، 25200° ، 25560° ، 25920° ، 26280° ، 26640° ، 27000° ، 27360° ، 27720° ، 28080° ، 28440° ، 28800° ، 29160° ، 29520° ، 29880° ، 30240° ، 30600° ، 30960° ، 31320° ، 31680° ، 32040° ، 32400° ، 32760° ، 33120° ، 33480° ، 33840° ، 34200° ، 34560° ، 34920° ، 35280° ، 35640° ، 36000° ، 36360° ، 36720° ، 37080° ، 37440° ، 37800° ، 38160° ، 38520° ، 38880° ، 39240° ، 39600° ، 39960° ، 40320° ، 40680° ، 41040° ، 41400° ، 41760° ، 42120° ، 42480° ، 42840° ، 43200° ، 43560° ، 43920° ، 44280° ، 44640° ، 45000° ، 45360° ، 45720° ، 46080° ، 46440° ، 46800° ، 47160° ، 47520° ، 47880° ، 48240° ، 48600° ، 48960° ، 49320° ، 49680° ، 50040° ، 50400° ، 50760° ، 51120° ، 51480° ، 51840° ، 52200° ، 52560° ، 52920° ، 53280° ، 53640° ، 54000° ، 54360° ، 54720° ، 55080° ، 55440° ، 55800° ، 56160° ، 56520° ، 56880° ، 57240° ، 57600° ، 57960° ، 58320° ، 58680° ، 59040° ، 59400° ، 59760° ، 60120° ، 60480° ، 60840° ، 61200° ، 61560° ، 61920° ، 62280° ، 62640° ، 63000° ، 63360° ، 63720° ، 64080° ، 64440° ، 64800° ، 65160° ، 65520° ، 65880° ، 66240° ، 66600° ، 66960° ، 67320° ، 67680° ، 68040° ، 68400° ، 68760° ، 69120° ، 69480° ، 69840° ، 70200° ، 70560° ، 70920° ، 71280° ، 71640° ، 72000° ، 72360° ، 72720° ، 73080° ، 73440° ، 73800° ، 74160° ، 74520° ، 74880° ، 75240° ، 75600° ، 75960° ، 76320° ، 76680° ، 77040° ، 77400° ، 77760° ، 78120° ، 78480° ، 78840° ، 79200° ، 79560° ، 79920° ، 80280° ، 80640° ، 81000° ، 81360° ، 81720° ، 82080° ، 82440° ، 82800° ، 83160° ، 83520° ، 83880° ، 84240° ، 84600° ، 84960° ، 85320° ، 85680° ، 86040° ، 86400° ، 86760° ، 87120° ، 87480° ، 87840° ، 88200° ، 88560° ، 88920° ، 89280° ، 89640° ، 90000° ، 90360° ، 90720° ، 91080° ، 91440° ، 91800° ، 92160° ، 92520° ، 92880° ، 93240° ، 93600° ، 93960° ، 94320° ، 94680° ، 95040° ، 95400° ، 95760° ، 96120° ، 96480° ، 96840° ، 97200° ، 97560° ، 97920° ، 98280° ، 98640° ، 99000° ، 99360° ، 99720° ، 100080° ، 100440° ، 100800° ، 101160° ، 101520° ، 101880° ، 102240° ، 102600° ، 102960° ، 103320° ، 103680° ، 104040° ، 104400° ، 104760° ، 105120° ، 105480° ، 105840° ، 106200° ، 106560° ، 106920° ، 107280° ، 107640° ، 108000° ، 108360° ، 108720° ، 109080° ، 109440° ، 109800° ، 110160° ، 110520° ، 110880° ، 111240° ، 111600° ، 111960° ، 112320° ، 112680° ، 113040° ، 113400° ، 113760° ، 114120° ، 114480° ، 114840° ، 115200° ، 115560° ، 115920° ، 116280° ، 116640° ، 117000° ، 117360° ، 117720° ، 118080° ، 118440° ، 118800° ، 119160° ، 119520° ، 119880° ، 120240° ، 120600° ، 120960° ، 121320° ، 121680° ، 122040° ، 122400° ، 122760° ، 123120° ، 123480° ، 123840° ، 124200° ، 124560° ، 124920° ، 125280° ، 125640° ، 126000° ، 126360° ، 126720° ، 127080° ، 127440° ، 127800° ، 128160° ، 128520° ، 128880° ، 129240° ، 129600° ، 129960° ، 130320° ، 130680° ، 131040° ، 131400° ، 131760° ، 132120° ، 132480° ، 132840° ، 133200° ، 133560° ، 133920° ، 134280° ، 134640° ، 135000° ، 135360° ، 135720° ، 136080° ، 136440° ، 136800° ، 137160° ، 137520° ، 137880° ، 138240° ، 138600° ، 138960° ، 139320° ، 139680° ، 140040° ، 140400° ، 140760° ، 141120° ، 141480° ، 141840° ، 142200° ، 142560° ، 142920° ، 143280° ، 143640° ، 144000° ، 144360° ، 144720° ، 145080° ، 145440° ، 145800° ، 146160° ، 146520° ، 146880° ، 147240° ، 147600° ، 147960° ، 148320° ، 148680° ، 149040° ، 149400° ، 149760° ، 150120° ، 150480° ، 150840° ، 151200° ، 151560° ، 151920° ، 152280° ، 152640° ، 153000° ، 153360° ، 153720° ، 154080° ، 154440° ، 154800° ، 155160° ، 155520° ، 155880° ، 156240° ، 156600° ، 156960° ، 157320° ، 157680° ، 158040° ، 158400° ، 158760° ، 159120° ، 159480° ، 159840° ، 160200° ، 160560° ، 160920° ، 161280° ، 161640° ، 162000° ، 162360° ، 162720° ، 163080° ، 163440° ، 163800° ، 164160° ، 164520° ، 164880° ، 165240° ، 165600° ، 165960° ، 166320° ، 166680° ، 167040° ، 167400° ، 167760° ، 168120° ، 168480° ، 168840° ، 169200° ، 169560° ، 169920° ، 170280° ، 170640° ، 171000° ، 171360° ، 171720° ، 172080° ، 172440° ، 172800° ، 173160° ، 173520° ، 173880° ، 174240° ، 174600° ، 174960° ، 175320° ، 175680° ، 176040° ، 176400° ، 176760° ، 177120° ، 177480° ، 177840° ، 178200° ، 178560° ، 178920° ، 179280° ، 179640° ، 180000° ، 180360° ، 180720° ، 181080° ، 181440° ، 181800° ، 182160° ، 182520° ، 182880° ، 183240° ، 183600° ، 183960° ، 184320° ، 184680° ، 185040° ، 185400° ، 185760° ، 186120° ، 186480° ، 186840° ، 187200° ، 187560° ، 187920° ، 188280° ، 188640° ، 189000° ، 189360° ، 189720° ، 190080° ، 190440° ، 190800° ، 191160° ، 191520° ، 191880° ، 192240° ، 192600° ، 192960° ، 193320° ، 193680° ، 194040° ، 194400° ، 194760° ، 195120° ، 195480° ، 195840° ، 196200° ، 196560° ، 196920° ، 197280° ، 197640° ، 198000° ، 198360° ، 198720° ، 199080° ، 199440° ، 199800° ، 200160° ، 200520° ، 200880° ، 201240° ، 201600° ، 201960° ، 202320° ، 202680° ، 203040° ، 203400° ، 203760° ، 204120° ، 204480° ، 204840° ، 205200° ، 205560° ، 205920° ، 206280° ، 206640° ، 207000° ، 207360° ، 207720° ، 208080° ، 208440° ، 208800° ، 209160° ، 209520° ، 209880° ، 210240° ، 210600° ، 210960° ، 211320° ، 211680° ، 212040° ، 212400° ، 212760° ، 213120° ، 213480° ، 213840° ، 214200° ، 214560° ، 214920° ، 215280° ، 215640° ، 216000° ، 216360° ، 216720° ، 217080° ، 217440° ، 217800° ، 218160° ، 218520° ، 218880° ، 219240° ، 219600° ، 219960° ، 220320° ، 220680° ، 221040° ، 221400° ، 221760° ، 222120° ، 222480° ، 222840° ، 223200° ، 223560° ، 223920° ، 224280° ، 224640° ، 225000° ، 225360° ، 225720° ، 226080° ، 226440° ، 226800° ، 227160° ، 227520° ، 227880° ، 228240° ، 228600° ، 228960° ، 229320° ، 229680° ، 230040° ، 230400° ، 230760° ، 231120° ، 231480° ، 231840° ، 232200° ، 232560° ، 232920° ، 233280° ، 233640° ، 234000° ، 234360° ، 234720° ، 235080° ، 235440° ، 235800° ، 236160° ، 236520° ، 236880° ، 237240° ، 237600° ، 237960° ، 238320° ، 238680° ، 239040° ، 239400° ، 239760° ، 240120° ، 240480° ، 240840° ، 241200° ، 241560° ، 241920° ، 242280° ، 242640° ، 243000° ، 243360° ، 243720° ، 244080° ، 244440° ، 244800° ، 245160° ، 245520° ، 245880° ، 246240° ، 246600° ، 246960° ، 247320° ، 247680° ، 248040° ، 248400° ، 248760° ، 249120° ، 249480° ، 249840° ، 250200° ، 250560° ، 250920° ، 251280° ، 251640° ، 252000° ، 252360° ، 252720° ، 253080° ، 253440° ، 253800° ، 254160° ، 254520° ، 254880° ، 255240° ، 255600° ، 255960° ، 256320° ، 256680° ، 257040° ، 257400° ، 257760° ، 258120° ، 258480° ، 258840° ، 259200° ، 259560° ، 259920° ، 260280° ، 260640° ، 261000° ، 261360° ، 261720° ، 262080° ، 262440° ، 262800° ، 263160° ، 263520° ، 263880° ، 264240° ، 264600° ، 264960° ، 265320° ، 265680° ، 266040° ، 266400° ، 266760° ، 267120° ، 267480° ، 267840° ، 268200° ، 268560° ، 268920° ، 269280° ،

* * * ترتيب * أوجد قياس زاويتيهما أحدهما بقياس موجب والأخرى بقياس سالب
* * * تكافؤ كل من الزوايا الآتية (مستقلة معطى من الضلع النشط).

جـ ٦ ١٥٠ - ٦ ١٥٠ - ٦ ٢٤٠ - ٦ ١٨٠ - ٦

مثال ٥ :- عيبر أصفه بقياس موجب كل من الزوايا الآتية :-

(١) ٦٢ - ٦ ٢٥٠ - ٦ ٢٠ (٢) ٦ ٢٠ (٣) ٢٠ ٢٠ ٧٩٠ - ٦

الحل :- (١) أصفه بقياس موجب = ٢٠ + ٦٢ = ٩٢ - ٦

(٢) أصفه بقياس موجب = ٢٠ + ٢٥٠ = ٢٧٠ - ٦

(٣) أصفه بقياس موجب = ٢٠ - ٢٠ = ١٧٠ - ٦

(٤) أصفه بقياس موجب = ٢٠ + ٧٩٠ = ٨١٠ - ٦

مكتبة
شربل - شارع حسي مبارك - خلف الثانوية بنات
01004423597, 3943035

مثال ٦ :- عيبر الربع الذي تقع فيه كل زاوية مما يأتي

(١) ٨٧٥ - ٦ (٢) ١٠٩ - ٦

الحل :- (١) ٨٧٥ - ٦ [٢٠ - ٦] - ٦ تأتي بأصفه بقياس موجب ومكافؤ لـ
٨٧٥ - ٦ = ٢٠ - ٦ = ١٠٥ - ٦

:- الزاوية ١٠٥ تقع في الربع الثاني :- الزاوية ٨٧٥ تقع أيضًا في الربع الثاني

(٢) ١٠٩ - ٦ [٢٠ - ٦] - ٦ تأتي بأصفه بقياس موجب ومكافؤ لـ

١٠٩ - ٦ = ٢٠ - ٦ = ٢٠ - ٦

:- الزاوية ٢٠ تقع في الربع الرابع :- الزاوية ١٠٩ تقع أيضًا في الربع الرابع

* * * ترتيب * عيبر الربع الذي تقع فيه كل زاوية مما يأتي

(١) ٥٥٠ - ٦ (٢) ١٢٢ - ٦

تمارين على الزاوية الموجبة

□ اكم ما يأتي :-

- (١) تلوّن الزاوية الموجبة من الموضع القياس إذا كانه
- (٢) يقال للزاوية الموجبة من الموضع القياس أنظر متكا فنة إذا كانه
- (٣) إذا وقع الضلع النقطي لزاوية موجبة على أحد محوري الإحداثيات تسمى الزاوية
- (٤) إذا كانه قياس زاوية موجبة 90° من قياس الزاوية $(90^\circ \pm 360^\circ)$ تسمى
- (٥) الزاوية التي قياسها 0° تقع من الربع -
- (٦) الزاوية التي قياسها 0° تقع من الربع -
- (٧) أصغر قياس موجب للزاوية التي قياسها 30° يساوي
- (٨) أكبر قياس سالب للزاوية التي قياسها 170° يساوي

□ غير أصغر قياس موجب لكل من الزاوية الآتية ثم غير الربع الذي تقع فيه كل زاوية :-

- | | | | |
|----------------|----------------|---------------|----------------|
| (١) 6° | (٢) 15° | (٣) 5° | (٤) 11° |
| (٥) 15° | (٦) 78° | (٧) 9° | (٨) 17° |

□ أوجد قياس زاوية غير أصغر موجب والآخر سالب مشترك لغير من الضلع النقطي لكل من :-

- | | | |
|---------------|----------------|----------------|
| (١) 1° | (٢) 20° | (٣) 20° |
|---------------|----------------|----------------|

□ جميع الزوايا الآتية تكافئ الزاوية 75° من الموضع القياس عاذا الإجابة

- | | | | |
|-----------------|----------------|-----------------|-----------------|
| (١) 285° | (٢) 75° | (٣) 285° | (٤) 285° |
|-----------------|----------------|-----------------|-----------------|

□ يدور أحد لاعبي الجباز على جمل في الألعاب بزاوية قياسها 20°

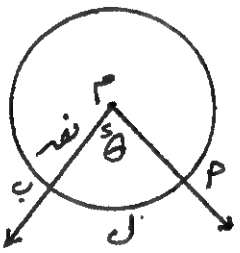
ارسم هذه الزاوية من الموضع القياس .

(د) القياس السمين والقياس الدائري للزاوية

* القياس الدائري للزاوية :-

واساسه تقسيم الدائرة الى (٣٢) قوسًا متساوية من الطول وتسمى وحدة القياس (الزاوية النصف قطرية) ويوزله بلون (أ) ويُقرأ واحد دائري " راديان " تعريف :-

القياس الدائري لزاوية مركزية من دائرة (٥) تحصر قوسًا طوله (ل) من دائرة طول نصف قطرها (نفر) يكونه على الصورة :-



$$\begin{aligned} \theta &= \frac{l}{\text{نفر}} \quad * \\ \text{نفر} &= \frac{l}{\theta} \quad * \end{aligned}$$

$$\theta = \frac{l}{\text{نفر}} \quad \text{ومن هنا} \quad * \quad \theta \times \text{نفر} = l$$

الزاوية النصف قطرية :- هي الزاوية المركزية من دائرة والتي تحصر قوسًا طوله يساوي طول نصف قطر الدائرة أي [ل = نفر] وبالتالي يكونه $\theta = 1$ مثال :- الزاوية المركزية التي تحصر قوسًا طوله يساوي نصف طول نصف قطر هذه الدائرة يكونه قياسها =
الحل :- $\theta = \frac{l}{\text{نفر}} \quad \therefore l = \text{نفر} \quad \therefore \theta = \frac{\text{نفر}}{\text{نفر}} = 1$

مثال :- إذا كان القياس الدائري لزاوية مركزية = ٥. فما به هذه الزاوية تحصر قوسًا من دائرة = طول نصف قطر هذه الدائرة .
الحل :- $\theta = \frac{l}{\text{نفر}} \quad \therefore l = \theta \times \text{نفر} \quad \therefore \theta = 5$

مثال ① :- زاوية مركزية من دائرة طول نصف قطرها ٥ سم تحصر قوس طوله ٢٥ سم أو به قياسها بالتقدير الدائري

$$\theta = \frac{l}{\text{نفر}} \quad \therefore \theta = \frac{25}{5} = 5 \text{ راديان}$$

مثال ⑤ :- زاوية مركزية قياسها $1,3^\circ$ تحصر قوسًا طوله 3 كم . أوجد طول قطر الدائرة ومساحة الدائرة ومحيطها لأقرب رقم عشري.

الحل :- $\theta = 1,3^\circ$ $l = 3\text{ كم}$

$$\therefore \text{نفر} = \frac{l}{\theta} = \frac{3}{1,3} = \text{نفر} = 2,30769 \text{ نفر} \therefore \text{طول القطر} = 10 \times 2,30769 = 23,0769 \text{ كم}$$

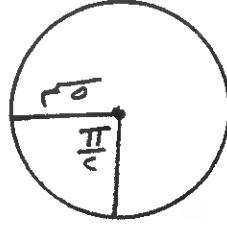
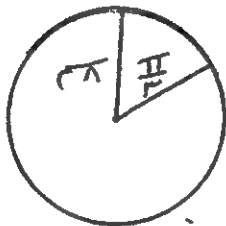
$$\therefore \text{مساحة الدائرة} = \text{طنفة} = 10 \times \frac{2,30769}{2} = 11,53845 \text{ كم}^2$$

$$\therefore \text{محيط الدائرة} = 2 \times \text{طنفة} = 10 \times 2,30769 \times 2 = 46,1538 \text{ كم}$$

* * * تدريب * (1) زاوية مركزية تحصر قوسًا طوله 8 كم في دائرة طول قطرها 10 كم . أوجد قياسها بالتقدير الدائري . * *

(2) زاوية مركزية قياسها 1° تحصر قوسًا طوله 11 كم . أوجد طول نصف قطر هذه الدائرة ومساحتها .

مثال ⑥ :- أوجد طول القوس الذي يحصر الزاوية المطلوبة في كل من الدوائر الآتية مقربًا الخارج لأقرب جزء من عشرة .



$$\text{الحل :- (1) طول القوس} = \theta \times \text{نفر} = 5 \times \frac{\pi}{3} = 5,23599 \text{ كم}$$

$$(2) \text{ طول القوس} = \theta \times \text{نفر} = 8 \times \frac{\pi}{9} = 2,79253 \text{ كم}$$

$$(3) \text{ طول القوس} = \theta \times \text{نفر} = 6 \times \frac{\pi}{4} = 4,71239 \text{ كم}$$

* العلاقة بين إقياس السنين وإقياس الدائري :-

إذا كان إقياس زاوية بالتقدير الدائري = θ° ، إقياسها بالتقدير السنين = s°

فإنه $\frac{s}{\theta} = \frac{\pi}{180}$ ومنه :- $\theta = \frac{1}{180} \times s$ $s = \frac{180}{\theta} \times \theta$ حيث $\frac{s}{\theta} = \frac{\pi}{180}$

ملاحظة

(1) $\frac{\pi}{6} = 30^\circ$ $\frac{\pi}{4} = 45^\circ$ $\frac{\pi}{3} = 60^\circ$ $\frac{\pi}{2} = 90^\circ$ $\frac{2\pi}{3} = 120^\circ$ $\frac{3\pi}{4} = 135^\circ$ $\pi = 180^\circ$ $\frac{5\pi}{4} = 225^\circ$ $\frac{3\pi}{2} = 270^\circ$ $\frac{7\pi}{4} = 315^\circ$

(2) إذا كان طول نصف قطر الدائرة يساوي الواحد فإن الدائرة تسمى "دائرة الوحدة" ويكون $\theta = 1$

مثال (4) :- أوجد بالراديان إقياس الدائري لأقرب ربع عشرية للزوايا التي إقياسها كالتالي :- (1) 1.0° (2) 10° (3) 37° (4) 47°

الحل :-

(1) $\theta = \frac{1}{180} \times s \Rightarrow \theta = \frac{1}{180} \times 1.0 = 0.00556$ راديان

(2) $\theta = \frac{1}{180} \times s \Rightarrow \theta = \frac{1}{180} \times 10 = 0.0556$ راديان

مثال (5) :- أوجد إقياس السنين لكل من الزوايا الآتية (1) 30° (2) 45° (3) 60°

الحل :-

(1) $s = \frac{180}{\theta} \times \theta = \frac{180}{\pi} \times \frac{\pi}{6} = 30^\circ$

(2) $s = \frac{180}{\theta} \times \theta = \frac{180}{\pi} \times \frac{\pi}{4} = 45^\circ$

* * * * *
 * * * * *
 * * * * *
 * * * * *
 * * * * *

هذه ملحوظة :-

(١) π بالتقدير الدائري تكافئ 180° بالتقدير الستيني

$$\text{فمثلاً} \quad \pi \text{ تكافئ } 180^\circ \times \frac{3}{2} = 270^\circ$$

$$\pi 180^\circ \text{ تكافئ } 180^\circ \times 180^\circ = 32400^\circ$$

(٢) إذا علم القياس الستيني لزاوية وطلب تحويلها إلى القياس الدائري بـ π

نستخدم القانون $\theta^\circ = \frac{\pi}{180} \times \text{القياس الستيني}$ ولا نعوضه عن π .

$$\text{فمثلاً} \quad 36^\circ \text{ تكافئ } \frac{\pi}{180} \times 36 = \frac{\pi}{5}$$

$$135^\circ \text{ تكافئ } \frac{\pi}{180} \times 135 = \frac{3\pi}{4}$$

مثال ٦ :- زاوية مركزية قياسها 80° من دائرة طول نصف قطرها ٥ سم. أوجد

طول القوس الذي تحصره لأقرب سم

$$\text{الحل} \quad \therefore \theta^\circ = 80^\circ, \text{ نصف } = 5 \text{ سم}$$

$$\therefore \theta^\circ = \frac{\pi}{180} \times 80 = \frac{4\pi}{9}$$

$$\therefore L = \theta^\circ \times \text{نصف} = \frac{4\pi}{9} \times 5 = \frac{20\pi}{9} \approx 7 \text{ سم}$$

مثال ٧ :- أوجد محيط الدائرة التي ببط زاوية محيطية قياسها 30° وتجاهاها

قوس طوله ٥ سم

$$\text{الحل} \quad \therefore \text{قياس الزاوية المحيطية} = 30^\circ \therefore \text{قياس الزاوية المركزية} = 60^\circ$$

$$\theta^\circ = \frac{\pi}{180} \times 60 = \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore \text{نفر} = \frac{1}{\theta} \Rightarrow \text{نفر} = \frac{0}{\pi \frac{1}{3}} = \frac{0}{\pi} = 0$$

$$\therefore \text{محيط الدائرة} = 2\pi r = 2\pi \times 10 = 20\pi$$

مثال ①: زاويتاه مجموع قياسيهما الدائري $3\frac{1}{2}^\circ$ والفرجه سيرا 3°
أوجد قياس كل منها بالتقدير الدائري والستيني ($\frac{22}{7} = \pi$)

$$\therefore \frac{22}{7} = \pi \Rightarrow 3\frac{1}{2}^\circ = \frac{3.5}{\pi} = \frac{3.5}{\frac{22}{7}} = \frac{3.5 \times 7}{22} = \frac{24.5}{22} = 1.1136$$

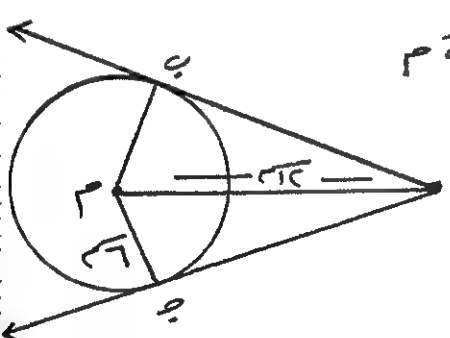
بفرجه أنه الزاويتاه هما 5° و 5°

$$\therefore 180^\circ = 5^\circ + 5^\circ \Rightarrow 180^\circ = 10^\circ \Rightarrow 180^\circ = 10^\circ \Rightarrow 180^\circ = 10^\circ$$

$$\text{بالتقريب من المعادلة الأولى} \Rightarrow 180^\circ = 5^\circ + 10^\circ \Rightarrow 180^\circ = 15^\circ \Rightarrow 180^\circ = 15^\circ$$

$$\therefore \text{وه (ش) بالدائري} = \frac{10}{\pi} \times 180^\circ = 573^\circ \text{ و } 1^\circ$$

$$\therefore \text{وه (ش) بالدائري} = \frac{10}{\pi} \times 180^\circ = 573^\circ \text{ و } 1^\circ$$



مثال ②: من الشكل المقابل: $\angle P = 60^\circ$ و P هي مساسه للدائرة M

$$22 = 2\pi r \Rightarrow r = \frac{22}{2\pi} = \frac{22}{2 \times \frac{22}{7}} = \frac{22 \times 7}{44} = \frac{7}{2}$$

$$\text{إذا علم أنه طول نصف قطر الدائرة} = 6 \Rightarrow r = 6$$

الحل:

$$\therefore \angle P = 60^\circ \Rightarrow \angle P = 60^\circ \Rightarrow \angle P = 60^\circ$$

$$\therefore \angle P = 60^\circ \Rightarrow \angle P = 60^\circ \Rightarrow \angle P = 60^\circ$$

$$\therefore \angle P = 60^\circ \Rightarrow \angle P = 60^\circ \Rightarrow \angle P = 60^\circ$$

$$\therefore \text{ن} (ب\hat{م}ج) = 2 \times 30 = 60^\circ$$

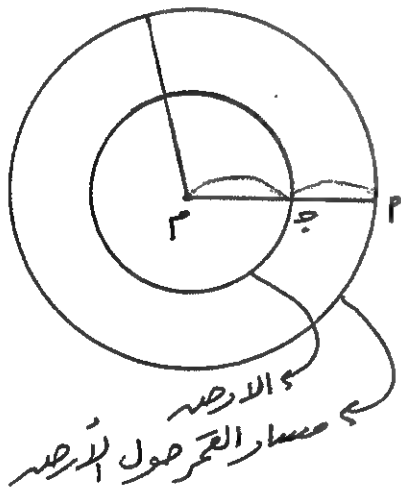
$$\therefore \text{ن} (ب\hat{م}ج) = 360 - (90 + 90 + 90) = 180^\circ$$

$$\therefore \text{ن} (د ب م ج) \text{ المنقطة} = 180 - 360 = 0^\circ$$

$$\therefore \theta = \frac{1}{180} \times 360 = \frac{1}{180} \times 360 = \frac{2}{3} \pi \approx 2.09 \text{ راديان}$$

$$\therefore \text{ل} = \theta \times \text{ن} = 2.09 \times 6 = 12.54 \text{ كم} \leftarrow \text{طول جيب الاكبرية} = 12.54 \text{ كم}$$

مثال ١٠ :- قمر صناعي يدور حول الأرض في مسار دائري دورة كاملة كل ٣ ساعات وإذا كان طول نصف قطر الأرض يبلغ تقريباً ٦٤٠٠ كم وبعد القمر عن سطح الأرض ٣٦٠٠ كم أوجد المسافة التي يقطعها القمر خلال ساعة واحدة تقريباً الناتج لأقرب كم.



$$\therefore \text{طول نصف قطر دائرة مسار القمر} = P + 3600$$

$$\therefore P + 3600 + 6400 = P + 10000 = P + 3600 + 6400 = P + 10000$$

القمر يقطع لمسار الدائري "دورة كاملة" في ٣ ساعات وهذا يقابل زاوية مركزية 360° (2π)

القمر يقطع حوساً طولة $\frac{1}{3}$ محيط الدائرة في الساعة الواحدة

وهذا يقابل زاوية مركزية 120° ($\frac{2\pi}{3}$)

$$\therefore \text{ل} = \theta \times \text{ن} = \frac{2\pi}{3} \times 10000 = 20944 \text{ كم}$$

* تدرب * يدور لاعبي الجباز على جهاز الألعاب بزوايا قياس ٩٠°
* * ارفع هذه الزاوية في الوضع القياسي وأوجد قياسها بالنقد
الدائري

تمارين على "مروية قياس الزاوية"

أولاً: اختيار من متعدد:

١) الزاوية التي قياسها 60° في الوضع القياسي تكافئ الزاوية التي قياسها:

- أ 120° ب 240° ج 300° د 420°

٢) الزاوية التي قياسها $\frac{\pi}{3}$ تقع في الربع:

- أ الأول ب الثاني ج الثالث د الرابع

٣) الزاوية التي قياسها $\frac{\pi}{4}$ تقع في الربع:

- أ الأول ب الثاني ج الثالث د الرابع

٤) إذا كان مجموع قياسات زوايا أى مضلع منتظم تساوى 180° (ن - ٢) حيث ن عدد الأضلاع، فإن قياس زاوية الخمس المنتظم بالقياس الدائري تساوى:

- أ $\frac{\pi}{3}$ ب $\frac{\pi}{4}$ ج $\frac{\pi}{5}$ د $\frac{\pi}{6}$

٥) الزاوية التي قياسها $\frac{\pi}{3}$ قياسها الستيني يساوى:

- أ 10° ب 21° ج 42° د 84°

٦) إذا كان القياس الستيني لزاوية هو 64° فإن قياسها الدائري يساوى:

- أ $0,18\pi$ ب $0,36\pi$ ج $0,18\pi$ د $0,36\pi$

٧) طول القوس في دائرة طول قطرها ٢٤ سم ويقابل زاوية مركزية قياسها 30° يساوى:

- أ 2π سم ب 3π سم ج 4π سم د 5π سم

٨) القوس الذى طوله 5π سم في دائرة طول نصف قطرها ١٥ سم يقابل زاوية مركزية قياسها يساوى:

- أ 30° ب 60° ج 90° د 180°

٩) إذا كان قياس إحدى زوايا مثلث 70° وقياس زاوية أخرى فيه $\frac{\pi}{4}$ فإن القياس الدائري للزاوية الثالثة

يساوى:

- أ $\frac{\pi}{4}$ ب $\frac{\pi}{6}$ ج $\frac{\pi}{3}$ د $\frac{5\pi}{12}$

ثانياً: أجب عن الأسئلة الآتية:

١٠ أوجد بدلالة π القياس الدائري للزوايا التي قياساتها كالاتي:

أ ٢٢٥°	ب ٢٤٠°
ج ١٣٥°	د ٣٠٠°
هـ ٣٩٠°	و ٧٨٠°

١١ أوجد بالراديان القياس الدائري للزوايا التي قياساتها كالاتي، مقرباً الناتج لثلاثة أرقام عشرية:

أ ٥٦,٦°	ب ٢٥١,٨°	ج ٤٨ ٥٠ ١٦٠°
---------	----------	--------------

١٢ أوجد القياس الستيني للزوايا التي قياساتها كالاتي، مقرباً الناتج لأقرب ثانية:

أ ٥٠,٤٩°	ب ٢٣,٢٧°	ج ٩٣,١°
----------	----------	---------

١٣ إذا كانت θ زاوية مركزية في دائرة طول نصف قطرها ١٠ سم وتحصر قوساً طوله ل :

أ إذا كان $\theta = ٢٠^\circ$ سم، $\theta = ٢٠^\circ$ أوجد ل. (لأقرب جزء من عشرة)

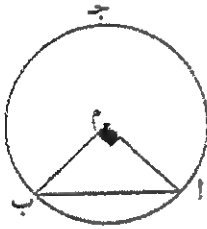
ب إذا كان $\theta = ٢٧,٣^\circ$ سم، $\theta = ٢٧,٣^\circ$ أوجد ل. (لأقرب جزء من عشرة)

١٤ زاوية مركزية قياسها ١٥٠° وتحصر قوساً طوله ١١ سم، احسب طول نصف قطر دائرتها (لأقرب جزء من عشرة)

١٥ أوجد القياس الدائري والقياس الستيني للزاوية المركزية التي تقابل قوساً طوله ٨,٧ سم في دائرة طول نصف قطرها ٤ سم.

١٦ الربط بالهندسة: مثلث قياس إحدى زواياه ٦٠° وقياس زاوية أخرى منه يساوي $\frac{\pi}{٤}$ أوجد القياس الدائري والقياس الستيني لزاويته الثالثة.

١٧ الربط بالهندسة: دائرة طول نصف قطرها ٤ سم، رسمت \triangle أ ب ج المحيطة التي قياسها ٣٠° أوجد طول القوس الأصغر $\widehat{أ ب}$



١٨ الربط بالهندسة: في الشكل المقابل إذا كان مساحة المثلث م أ ب

القائم الزاوية في م = ٣٢ سم^٢ فأوجد محيط الشكل مقرباً الناتج لأقرب

رقمين عشرين

مكتبة وسام

شربين - شارع حسي مبارك - خلف الثانوية بنات

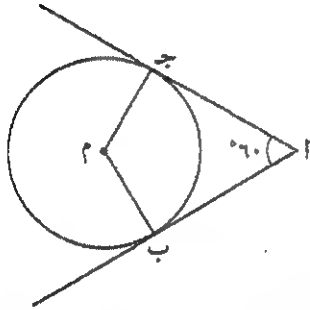
01004423597_3943035

١٩) الربط بالهندسة: \overline{AB} قطر في دائرة طوله ٢٤ سم، رسم الوتر \overline{AC} بحيث كان $\angle C = 50^\circ$. أوجد طول القوس الأصغر \widehat{AC} مقرباً الناتج لأقرب رقمين عشريين.

٢٠) مسافات: كم المسافة التي تقطعها نقطة على طرف عقرب الدقائق خلال ١٠ دقائق إذا كان طول هذا العقرب ٦ سم؟

٢١) فلك: قمر صناعي يدور حول الأرض في مسار دائري دورة كاملة كل ٦ ساعات، فإذا كان طول نصف قطر مساره عن مركز الأرض ٩٠٠٠ كم، فأوجد سرعته بالكيلومتر في الساعة.

٢٢) الربط بالهندسة: في الشكل المقابل:



\overline{AB} ، \overline{AC} مماسان للدائرة م، و، $\angle BAC = 60^\circ$ ، $AB = 12$ سم. أوجد لأقرب عدد صحيح طول القوس الأكبر \widehat{BC} .

٢٣) الربط بالزمن: تستخدم المزولة الشمسية لتحديد الوقت أثناء النهار من خلال طول الظل الذي يسقط على سطح مدرج لإظهار الساعة وأجزائها، فإذا كان الظل يدور على القرص بمعدل 15° لكل ساعة.



أ أوجد قياس الزاوية بالراديان التي يدور الظل عنها بعد مرور ٤ ساعات.

ب بعد كم ساعة يدور الظل بزاوية قياسها $\frac{\pi}{3}$ راديان؟

ج مزولة طول نصف قطرها ٢٤ سم، أوجد بدلالة π طول القوس الذي يصنعه دوران الظل على حافة القرص بعد مرور ١٠ ساعات.

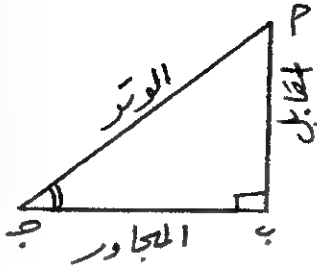
٢٤) تفكير ناقد: مستقيم يصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{3}$ راديان في الوضع القياسي لدائرة الوحدة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات. أوجد معادلة هذا المستقيم.

(٣) الدوال المثلثية

تعريف :- نعلم أنه :- من أي مثلث ABC قائم من B يكون :-

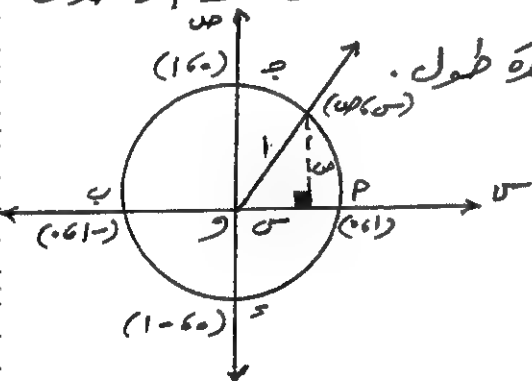
$$\sin A = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{BC}{AC} \quad \cos A = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{AB}{AC}$$

$$\tan A = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{BC}{AB}$$



أي أنه :- النسبة المثلثية للزاوية الحادة بنسبة ثابتة لا تتغير إلا إذا تغير قياس زاويتها.

دائرة الوحدة :- دائرة الوحدة هي دائرة مركزها نقطة الأصل لنظام إحداثي



متساو و طول نصف قطرها يساوي وحدة طول.

• دائرة الوحدة تقطع محاور السينات في النقطتين

$P(1,0)$ و $B(0,-1)$ وتقطع محاور الصادات

في النقطتين $J(0,1)$ و $K(-1,0)$

⊗ إذا كانت $(\cos \theta, \sin \theta)$ هما إحداثيات أي نقطة على دائرة الوحدة فإنه

$\sin \theta \in [-1, 1]$

$\cos \theta \in [-1, 1]$

"محدد مختلوث"

(مهمة)

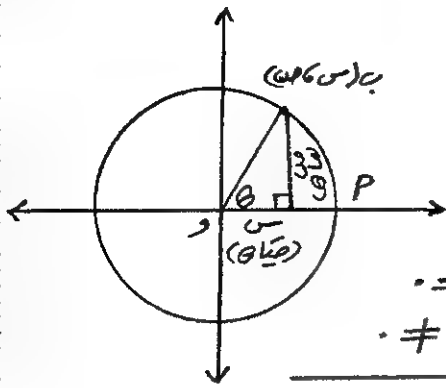
$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

الدوال المثلثية الأساسية للزاوية :-

لأي زاوية موجهة من الوضع القياسي وضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة في

النقطة $B(\cos \theta, \sin \theta)$ وقياسها θ يملك تعريف الدوال الآتية :-

(١) جيب الزاوية $\theta =$ الإحداثي الصادي للنقطة $B \Leftarrow \sin \theta$



(١) جيب تمام الزاوية θ = الإحداثي السيني للنقطة ب

$$\leftarrow \boxed{\cos \theta = x}$$

(٢) ظل الزاوية θ = $\frac{\text{الإحداثي الصادي}}{\text{الإحداثي السيني}}$

$$\leftarrow \boxed{\tan \theta = \frac{y}{x}} \quad , \quad \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta \quad , \quad \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta \quad , \quad \cos \theta \neq 0$$

من "ملحوظة" (١) يتلَب (س، ص) لأي نقطة على دائرة الوحدة على الصورة (جيبا، جيبا)

مثال: إذا كانت النقطة $(\frac{12}{13}, \frac{5}{13})$ هي نقطة تقاطع الضلع النشط للزاوية موجبة قياسها θ مع دائرة الوحدة فإنه:-

$$\cos \theta = \frac{5}{13} \quad , \quad \sin \theta = \frac{12}{13} \quad , \quad \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{12}{5}$$

(٢) الزوايا المتكافئة لـ نفس الدوال المثلثية .

مثال: جتا ٤٠° = جتا (٤٠° - ٣٦°) = جتا ٦° "حيث ٤٠° تكافئ ٦°"

مقلوبات الدوال المثلثية :-

لأي زاوية موجبة من الوضع القياس وضلعوط النشط تقطع دائرة الوحدة من النقطة ب (س، ص) إذا كان قياس الزاوية θ فإنه:-

$$(١) \text{ قاطع الزاوية } \theta : \cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sec \theta} \quad , \quad \text{حيث } \sec \theta \neq 0$$

$$(٢) \text{ قاطع تمام الزاوية } \theta : \sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{\csc \theta} \quad , \quad \text{حيث } \csc \theta \neq 0$$

$$(٣) \text{ ظل تمام الزاوية } \theta : \tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{1}{\cot \theta} \quad , \quad \cot \theta \neq 0$$

مثال ⑤ :- أوجد جميع الدوال المثلثية لزاوية قياسها θ المرسومة في الموضع إقياس وضلعها الزاوي يقطع دائرة الوحدة في النقطة P في كل ما يأتي :-

(1) $P(1, 0)$ (2) $P(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ (3) $P(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5})$ (4) $P(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$

الحل :-

(1) $P(1, 0) \Rightarrow \cos \theta = 1$ $\sin \theta = 0$

$\cos \theta = 1$ $\sin \theta = 0$

$\cos \theta = 1$ $\sin \theta = 0$ (غير معرف)

(2) $P(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ $\cos \theta = \frac{3}{5}$ $\sin \theta = \frac{4}{5}$

$\cos \theta = \frac{3}{5}$ $\sin \theta = \frac{4}{5}$ $\cos \theta = \frac{3}{5}$ $\sin \theta = \frac{4}{5}$

$\cos \theta = \frac{3}{5}$ $\sin \theta = \frac{4}{5}$ $\cos \theta = \frac{3}{5}$ $\sin \theta = \frac{4}{5}$

$\cos \theta = \frac{3}{5}$ $\sin \theta = \frac{4}{5}$ $\cos \theta = \frac{3}{5}$ $\sin \theta = \frac{4}{5}$

$\cos \theta = \frac{3}{5}$ $\sin \theta = \frac{4}{5}$ $\cos \theta = \frac{3}{5}$ $\sin \theta = \frac{4}{5}$

$\cos \theta = \frac{3}{5}$ $\sin \theta = \frac{4}{5}$ $\cos \theta = \frac{3}{5}$ $\sin \theta = \frac{4}{5}$

(3) $P(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5})$ $\cos \theta = -\frac{1}{5}$ $\sin \theta = \frac{2}{5}$

$\cos \theta = -\frac{1}{5}$ $\sin \theta = \frac{2}{5}$ $\cos \theta = -\frac{1}{5}$ $\sin \theta = \frac{2}{5}$

$\cos \theta = -\frac{1}{5}$ $\sin \theta = \frac{2}{5}$ $\cos \theta = -\frac{1}{5}$ $\sin \theta = \frac{2}{5}$

$\cos \theta = -\frac{1}{5}$ $\sin \theta = \frac{2}{5}$

$\cos \theta = -\frac{1}{5}$ $\sin \theta = \frac{2}{5}$ $\cos \theta = -\frac{1}{5}$ $\sin \theta = \frac{2}{5}$

$\cos \theta = -\frac{1}{5}$ $\sin \theta = \frac{2}{5}$

$\cos \theta = -\frac{1}{5}$ $\sin \theta = \frac{2}{5}$

$\cos \theta = -\frac{1}{5}$ $\sin \theta = \frac{2}{5}$

$\cos \theta = -\frac{1}{5}$ $\sin \theta = \frac{2}{5}$

مثال ⑥ :- إذا عرفت الزاوية الموضحة في الموضع الإقياس والتي قياسها θ النقطة

ب $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ على دائرة الوحدة حيث P . أوجد جميع الدوال المثلثية

ثم أوجد $\cos \theta + \sin \theta$.

الحل :- :- لأي نقطة على دائرة الوحدة $1 = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta$

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} = \sec^2 \theta \Leftrightarrow 1 = \sec^2 \theta \cos^2 \theta \Leftrightarrow 1 = \sec^2 \theta \left(\frac{1}{\sec^2 \theta} \right) + \tan^2 \theta \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\frac{1}{\cos^2 \theta} = \sec^2 \theta} \Leftrightarrow 0 < \sec^2 \theta \quad \frac{1}{\cos^2 \theta} \pm = \frac{1}{\cos^2 \theta} \pm = \sec^2 \theta \pm$$

$$(\frac{1}{\cos^2 \theta} - \tan^2 \theta) = (\frac{1}{\cos^2 \theta} \times \frac{1}{\cos^2 \theta} - \tan^2 \theta \times \tan^2 \theta) \Leftrightarrow (\sec^2 \theta - \tan^2 \theta) = 1$$

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} = \sec^2 \theta \quad \frac{1}{\sin^2 \theta} = \csc^2 \theta$$

$$\frac{1}{\sin^2 \theta} = \csc^2 \theta \quad \frac{1}{\cos^2 \theta} = \sec^2 \theta$$

$$\frac{1}{\sin^2 \theta} = \csc^2 \theta \quad \frac{1}{\cos^2 \theta} = \sec^2 \theta$$

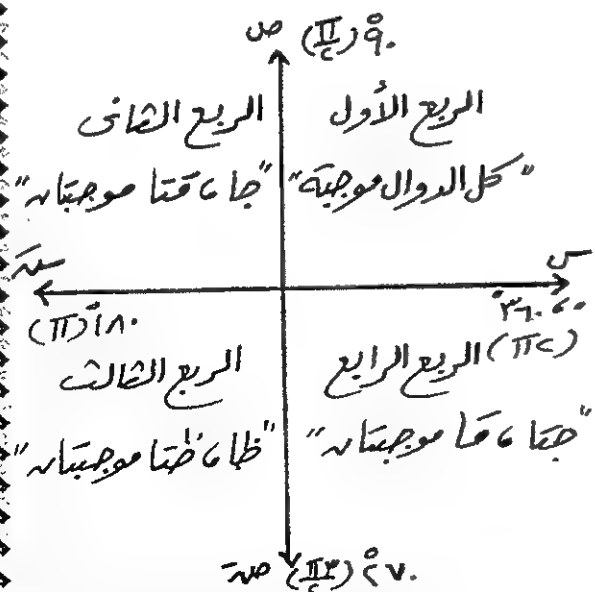
$$\# \text{ II} = \frac{1}{\cos^2 \theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta} + \frac{1}{\cos^2 \theta} = (\frac{1}{\cos^2 \theta}) + (\frac{1}{\cos^2 \theta}) = \sec^2 \theta + \sec^2 \theta \Leftrightarrow$$

* تدوين * أوجد جميع الدوال المثلثية لزاوية قياسها θ المرسومة في الوضع القياسي وضلعل النقطتي يقطع دائرة الوحدة من النقطة ب حيث :-

$$(1) \text{ ب } (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) \quad (2) \text{ ب } (0, 1) \quad (3) \text{ ب } (-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}) \quad (4) \text{ ب } (-1, 0)$$

إشارة الدوال المثلثية :-

الربع	الفترة تقع فيها الزاوية	إشارة لدوال المثلثية		
		جا	جتا	ظا
الأول	$[0, \frac{\pi}{2}]$	+	+	+
الثاني	$[\frac{\pi}{2}, \pi]$	+	-	-
الثالث	$[\pi, \frac{3\pi}{2}]$	-	-	+
الرابع	$[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$	-	+	+



مثال ٣ :- حدد إشارة الدوال الآتية :-

ح.١٠ ، ج.٤٠ ، ظ.١٠ ، ق.٣٠ ، ق.٣٠ ، ق.٣٠ ، ج.٩٠

الحل :- * : ٦٠ تقع في الربع الأول

* : ٤٠ تقع في الربع الثالث

* : ١٠ تقع في الربع الثالث

* : ٣٠ تقع في الربع الرابع

* : $\frac{180 \times 5}{3} = 300$ (الزاوية) $\frac{180 \times 5}{3} = 300$ تقع في الربع الرابع

* : ٣٠ تكافئ ٣٠ + ٣٠ = ٦٠ (الرابع) : ٣٠ - ٣٠ سالبة

* : ٩٠ تكافئ ٩٠ - ٩٠ = ٠ (الثالث) : ٩٠ - ٩٠ سالبة

* * * حدد إشارة الدوال الآتية :-

ح.١٠ ، ج.٩٠ ، ظ.٣٠ ، ق.٣٠ ، ق.٣٠ ، ج.٩٠

مثال ٣ :- إذا كان الضلع المنطري لزاوية θ من وضعت القياس يقطع دائرة

الوحدة في النقطة ب (٦.٠ - ٨.٠) فأوجد قيمة $\sin \theta$ و $\cos \theta$

ثم أوجد $\tan \theta$ ، $\cot \theta$ ، $\sec \theta$ ، $\csc \theta$

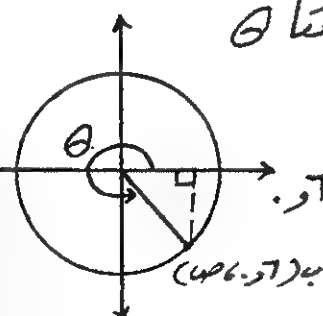
الحل :- لأي نقطة على دائرة الوحدة $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

:- (٦.٠ - ٨.٠) $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ $\Rightarrow \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - 0.6^2 = 0.8$

$\Rightarrow \cos \theta = \pm 0.8$

:- $\theta \in [0, \pi]$: θ تقع في الربع الرابع : $\sin \theta$ سالبة

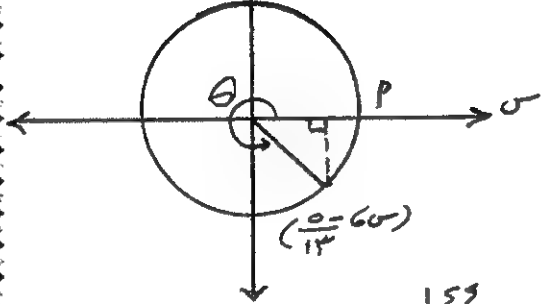
:- $\cos \theta = 0.8$ $\Rightarrow \theta \in (\pi, 2\pi)$



$$\therefore \text{ظنا } \theta = \frac{\pi}{2} = \frac{1}{0} = \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\theta} = \frac{1}{\frac{1}{\theta}} = \theta \quad \frac{\pi}{2} = \frac{1}{0} = \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\theta} = \frac{1}{\frac{1}{\theta}} = \theta$$

$$\text{قيمة المقدار } \theta = \frac{1}{\frac{1}{\theta}} = \theta = \frac{1}{\frac{1}{\theta}} = \theta = \frac{1}{\frac{1}{\theta}} = \theta$$

مثال ٥ :- إذا كانت $\theta > 0$ وكانت $\theta = \frac{1}{\theta}$ أوجد جميع النسب المثلثية الأساسية للزاوية θ .



الحل :- $\theta = \frac{1}{\theta} = \theta = \frac{1}{\theta} = \theta = \frac{1}{\theta} = \theta$
 $\cos \theta = \frac{1}{\theta}$ حيث $\theta < \frac{\pi}{2}$ (ملاحظة)

$$\therefore \sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\theta}\right)^2} = \sqrt{\frac{\theta^2 - 1}{\theta^2}} = \frac{\sqrt{\theta^2 - 1}}{\theta}$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{1}{\theta} = \frac{1}{\frac{1}{\theta}} = \theta = \frac{1}{\theta} = \theta = \frac{1}{\theta} = \theta$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{1}{\theta} = \frac{1}{\frac{1}{\theta}} = \theta = \frac{1}{\theta} = \theta = \frac{1}{\theta} = \theta$$

$$\# \quad \frac{1}{\theta} = \frac{1}{\theta} = \frac{1}{\theta} = \frac{1}{\theta} = \frac{1}{\theta} = \frac{1}{\theta} = \frac{1}{\theta} = \frac{1}{\theta}$$

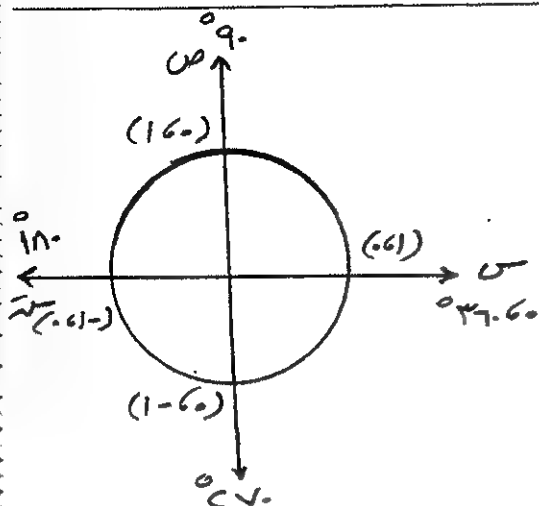
* * * تدريجي * * * إذا كانت θ قياس زاوية في الموضع القياسي حيث $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ ، $\theta = \frac{1}{\theta}$ أوجد $\cos \theta$ ، $\sin \theta$ ، $\tan \theta$ ، $\cot \theta$ ، $\sec \theta$ ، $\csc \theta$.
 (ج) إذا كانت $\theta > \pi$ وكانت $\theta = \frac{1}{\theta}$ أوجد جميع النسب المثلثية للزاوية θ

مكتبة وسام

شربل - شارع حسني مبارك - خلف الثانوية بنات

01004423597_3943035

الدوال المثلثية لبعض الزوايا الخاصة :-



مع العلم أن $\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\frac{\pi}{2}}$

* ٣٦٠°	← جتا (٠°)	ظا صفر
* ٩٠°	← (١, ٠)	غير معرف
* ١٨٠°	← (٠, ١-)	صفر
* ٢٧٠°	← (١-٠)	غير معرف
* ٣٠°	← $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
* ٦٠°	← $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
* ٤٥°	← $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$	١

وبحسب نتائج ذلك في الجدول التالي :-

ملاحظة

يتم إيجاد

هذه الدوال

المثلثية باستخدام

الآلة الحاسبة

حيث

صا ← sin

صبا ← cos

ظا ← tan

مثال : صا ٣٠°

$$\Rightarrow \sin(30^\circ) = \frac{1}{2}$$

قياس زاوية θ	إحداثيات النقطة التي يقطعها خط نصف الدائرة مع دائرة الوحدة	قيم الدوال المثلثية		
		صا θ	جبا θ	ظا θ
٣٦٠° ، ٠° (٢٢٤)	(١, ٠)	٠	١	٠
٩٠° (٢٢٤)	(٠, ١)	١	٠	غير معرف
١٨٠° (٢٢٤)	(-١, ٠)	٠	-١	٠
٢٧٠° (٢٢٤)	(٠, -١)	-١	٠	غير معرف
٣٠° (٢٢٤)	$(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
٦٠° (٢٢٤)	$(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
٤٥° (٢٢٤)	$(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	١

مع العلم أن $\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\frac{\pi}{2}}$ و $\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

مثال ٥ :- برهن استخدام الآلة الحاسبة أو جد قيمته :-

$$(1) \quad 3. \text{ جا } 60^\circ + 9. \text{ جا } 30^\circ - 9. \text{ جا } 60^\circ + 3. \text{ جا } 30^\circ$$

الحل :-

$$(1) \quad 3. \text{ جا } 60^\circ + 9. \text{ جا } 30^\circ - 9. \text{ جا } 60^\circ + 3. \text{ جا } 30^\circ = \left(\frac{1}{2}\right) - 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{4}\right)$$

$$\left[\frac{3}{2}\right] = \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} =$$

$$(2) \quad 9. \text{ جا } 60^\circ + 3. \text{ جا } 30^\circ - 3. \text{ جا } 60^\circ + 9. \text{ جا } 30^\circ = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 0 = \frac{1}{4}$$

مثال ٧ :- أثبت أنه :- (1) $9. \text{ جا } 60^\circ + 3. \text{ جا } 30^\circ = 9. \text{ جا } 30^\circ + 3. \text{ جا } 60^\circ$

$$(2) \quad 9. \text{ جا } 60^\circ - 3. \text{ جا } 30^\circ = 3. \text{ جا } 60^\circ - 9. \text{ جا } 30^\circ$$

الحل :-

$$(1) \quad \text{الطرف الأيسر} = 9. \text{ جا } 60^\circ + 3. \text{ جا } 30^\circ = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$= 1 = 9. \text{ جا } 30^\circ + 3. \text{ جا } 60^\circ = \text{الطرف الأيمن} \quad \#$$

$$(2) \quad \text{الطرف الأيسر} = 9. \text{ جا } 60^\circ - 3. \text{ جا } 30^\circ = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{4}\right) = 0$$

$$\text{الطرف الأيمن} = 3. \text{ جا } 60^\circ - 9. \text{ جا } 30^\circ = 0 \quad \therefore \text{الطرفان متساويان} \quad \#$$

* * * تدريبات * * * (1) $9. \text{ جا } 60^\circ + 3. \text{ جا } 30^\circ - 3. \text{ جا } 60^\circ - 9. \text{ جا } 30^\circ$

$$(2) \quad 9. \text{ جا } 30^\circ + 3. \text{ جا } 60^\circ - 3. \text{ جا } 30^\circ - 9. \text{ جا } 60^\circ$$

* * * أثبت أنه :- (1) $9. \text{ جا } 60^\circ - 3. \text{ جا } 30^\circ = 3. \text{ جا } 60^\circ - 9. \text{ جا } 30^\circ$

$$(2) \quad 9. \text{ جا } 30^\circ + 3. \text{ جا } 60^\circ - 3. \text{ جا } 30^\circ - 9. \text{ جا } 60^\circ = \frac{1}{4}$$

$$(3) \quad 9. \text{ جا } 60^\circ - 3. \text{ جا } 30^\circ + 3. \text{ جا } 60^\circ - 9. \text{ جا } 30^\circ = 0$$

مثال ٨: أوجد قيمة θ من كل ما يأتي :-

(١) $\sin \theta = \frac{1}{2}$ ، $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ، $\csc \theta = 2$ ، $\sec \theta = 2$ ، $\cot \theta = \sqrt{3}$ ، θ حادة

الحل :-

(١) $\sin \theta = \frac{1}{2}$ ، $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ، $\csc \theta = 2$ ، $\sec \theta = 2$ ، $\cot \theta = \sqrt{3}$ ، θ حادة

$\sin \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 30^\circ$ ، $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = 30^\circ$ ، $\tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \theta = 30^\circ$ ، $\csc \theta = 2 \Rightarrow \theta = 30^\circ$ ، $\sec \theta = 2 \Rightarrow \theta = 30^\circ$ ، $\cot \theta = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = 30^\circ$

$\therefore \theta = 30^\circ$ ، $\theta = 30^\circ$ ، $\theta = 30^\circ$ ، $\theta = 30^\circ$ ، $\theta = 30^\circ$ ، $\theta = 30^\circ$

$\therefore \theta = 30^\circ$ ، $\theta = 30^\circ$ ، $\theta = 30^\circ$ ، $\theta = 30^\circ$ ، $\theta = 30^\circ$ ، $\theta = 30^\circ$

مثال ٩: أوجد قيمة θ حيث $0^\circ < \theta < 90^\circ$ والتي تحقق المعادلة :-

$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}$

الحل

$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} \Rightarrow \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}$

$\frac{1}{\cos \theta} = \frac{2 \cos \theta}{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta} \Rightarrow 1 = \frac{2 \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}$

* * * أوجد قيمة θ من كل ما يأتي :-

(١) $\sin \theta = \frac{1}{2}$ ، $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ، $\csc \theta = 2$ ، $\sec \theta = 2$ ، $\cot \theta = \sqrt{3}$ ، θ حادة

* إذا كان θ : $\theta = 30^\circ$ ، $\theta = 30^\circ$ ، $\theta = 30^\circ$ ، $\theta = 30^\circ$ ، $\theta = 30^\circ$ ، $\theta = 30^\circ$

أوجد قيمة θ حيث $0^\circ < \theta < 90^\circ$.

❖ اخترا الإجابة الصحيحة :-

- ٥ اجبت إشارة كل منه الدوال الثلاثة الآتية :-

$$\frac{\pi c - b}{9} \in \frac{\pi q - b}{\Sigma} \in \frac{\pi q - b'}{\Sigma} \in \Sigma \cdot b \in \Psi \cdot b' \in \Sigma \cdot b$$

٣) أوجد جميع الدوال المثلثية للزاوية θ والتي يمر ضلعها النشط في بالنقاط الآتية :-

$$(1) \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_C = \frac{C}{p} \quad (1) \quad \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_C = - \frac{1}{T} \quad (2) \quad \left(\frac{\partial V}{\partial C} \right)_T = \frac{1}{C} \quad (3)$$

٤ إذا كان θ هو قياس زاوية موجبة من الوضع القياسي ، و θ يمر ضلع الزاوية
بناثرة الوحدة أوجد جميع الدوال المثلثية للزاوية θ من الحالات الآتية :-

$$(1) \left(\frac{2}{3}, 6\right) \quad (2) (-3, 5) \quad (3) \left(\frac{3}{4}, -6\right) \quad (4) \left(\frac{1}{2}, -5\right) \quad (5) (-5, -5)$$

٥ إذا كان الضلع النشط للزاوية θ من الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة من النقطة
ب وكان $\theta = \frac{\pi}{3}$ حيث $\theta \in [0, 2\pi]$ فأوجد إحداثي ب
ثم اثبت أنه $\sin \theta = \frac{1}{2}$ و $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

٦ أثبت أنه النقطة $\left(\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ تقع على دائرة الوحدة وأوجد θ
٧ إذا كان $\theta = c$ وكان $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ أوجد θ

٨ بدو استخدام الحاسبة أوجد قيمة كل مما يأتي :-

$$(1) \sin 180^\circ + \cos 90^\circ + \tan 0^\circ$$

$$(2) \sin 30^\circ + \cos 60^\circ + \tan 45^\circ$$

$$(3) \sin 60^\circ - \cos 30^\circ + \tan 90^\circ$$

$$(4) \sin 90^\circ + \cos 0^\circ + \tan 180^\circ$$

$$(5) \sin 45^\circ - \cos 45^\circ + \tan 45^\circ$$

$$(6) \sin 30^\circ + \cos 60^\circ - \tan 90^\circ + \sin 45^\circ + \cos 45^\circ$$

٩ اثبت صحة كل من المتساويات الآتية :-

$$(1) \sin 90^\circ = \cos 0^\circ$$

$$(2) \sin 30^\circ = \cos 60^\circ$$

$$(3) \sin 45^\circ = \cos 45^\circ$$

$$(4) \sin 60^\circ = \cos 30^\circ$$

$$(5) \sin 90^\circ = \cos 0^\circ$$

$$(6) \sin 30^\circ = \cos 60^\circ$$

$$(7) \sin 45^\circ = \cos 45^\circ$$

$$(8) \sin 60^\circ = \cos 30^\circ$$

١٠ أوجد قيمة $\sin \theta$ إذا كان $\theta = \frac{\pi}{3}$

١١ إذا كانت $\theta \in [0, 2\pi]$ أوجد قيمة $\sin \theta$ من كل مما يأتي

$$(1) \sin 30^\circ + \cos 60^\circ + \tan 45^\circ$$

$$(2) \sin 60^\circ - \cos 30^\circ + \tan 90^\circ$$

(٤) الزوايا المنسبة

* الزاويتان المنسبتان :- هما زاويتان الفرعه بغير قياسيهما أو مجموع قياسيهما
يساوي عددًا صحيحًا واحد القوائم .

نمثلة :- * الزاويتان ٢٠° ، ٤٠° زاويتان منسبتان لـ ٢٠ - ٤٠ = ٢٠ "عامة"
* الزاويتان ٣٠° ، ٦٠° زاويتان منسبتان لـ ٣٠ + ٦٠ = ٩٠ "عامة"

□ الدوال المثلثية للزاويتين المنسبتين θ و $(\theta - 180^\circ)$:-

$$\begin{aligned} * \sin(\theta - 180^\circ) &= -\sin \theta & * \cos(\theta - 180^\circ) &= -\cos \theta \\ * \tan(\theta - 180^\circ) &= \tan \theta & * \cot(\theta - 180^\circ) &= \cot \theta \\ * \sec(\theta - 180^\circ) &= -\sec \theta & * \csc(\theta - 180^\circ) &= -\csc \theta \end{aligned}$$

مثال :- $\sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 120^\circ = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$

$\tan 120^\circ = \tan(180^\circ - 60^\circ) = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$

* تدريبات * أوجد ما يأتي :- $\sin 150^\circ$ ، $\cos 150^\circ$ ، $\tan 150^\circ$ ، $\cot 150^\circ$

□ الدوال المثلثية للزاويتين المنسبتين θ و $(\theta + 180^\circ)$.

$$\begin{aligned} * \sin(\theta + 180^\circ) &= -\sin \theta & * \cos(\theta + 180^\circ) &= -\cos \theta \\ * \tan(\theta + 180^\circ) &= \tan \theta & * \cot(\theta + 180^\circ) &= \cot \theta \\ * \sec(\theta + 180^\circ) &= -\sec \theta & * \csc(\theta + 180^\circ) &= -\csc \theta \end{aligned}$$

مثال :- $\sin 240^\circ = \sin(180^\circ + 60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 240^\circ = \cos(180^\circ + 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$

$\tan 240^\circ = \tan(180^\circ + 60^\circ) = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$

* تدرب * أوجد ما يأتي :- جـ ٤٠ ، جـ ٥٠ ، جـ ٦٠ ، جـ ٧٠ ، جـ ٨٠ ، جـ ٩٠ ، جـ ١٠٠

٥ الدوال المثلثية للزوايا النسبية θ ، $(\theta - 360)$:-

$$\sin(\theta - 360) = \sin \theta \quad \sin(\theta - 720) = \sin \theta$$

$$\cos(\theta - 360) = \cos \theta \quad \cos(\theta - 720) = \cos \theta$$

$$\tan(\theta - 360) = \tan \theta \quad \tan(\theta - 720) = \tan \theta$$

$$\text{مثال :-} \quad \sin 30^\circ = \sin(30^\circ - 360^\circ) = \sin(-330^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\cos 150^\circ = \cos(150^\circ - 360^\circ) = \cos(-210^\circ) = \cos 210^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 210^\circ = \tan(210^\circ - 360^\circ) = \tan(-150^\circ) = -\tan 150^\circ = -\tan 30^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

* تدرب * أوجد ما يأتي :- جـ ٢٠ ، جـ ٣٠ ، جـ ٤٠ ، جـ ٥٠ ، جـ ٦٠ ، جـ ٧٠ ، جـ ٨٠ ، جـ ٩٠ ، جـ ١٠٠

٦ الدوال المثلثية للزوايا النسبية θ ، $\theta - 60$:-

$$\sin(\theta - 60) = \sin \theta \quad \sin(\theta - 120) = \sin \theta$$

$$\cos(\theta - 60) = \cos \theta \quad \cos(\theta - 120) = \cos \theta$$

$$\tan(\theta - 60) = \tan \theta \quad \tan(\theta - 120) = \tan \theta$$

$$\text{مثال :-} \quad \sin 60^\circ = \sin(60^\circ - 60^\circ) = \sin 0^\circ = 0$$

$$\cos 120^\circ = \cos(120^\circ - 60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \tan(30^\circ - 60^\circ) = \tan(-30^\circ) = -\tan 30^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

* تدرب * أوجد ما يأتي :- جـ ١٠ ، جـ ٢٠ ، جـ ٣٠ ، جـ ٤٠ ، جـ ٥٠ ، جـ ٦٠ ، جـ ٧٠ ، جـ ٨٠ ، جـ ٩٠ ، جـ ١٠٠

مكتبة وسام

شؤون - شارع حنفى - مبارك خلف الثانوية بنات

01004423597.3943035

□ الدوال المثلثية للزاوية θ ، $(\theta - 90^\circ)$:-

$$\sin(\theta - 90^\circ) = -\cos \theta \quad \cos(\theta - 90^\circ) = \sin \theta$$

$$\tan(\theta - 90^\circ) = -\cot \theta \quad \cot(\theta - 90^\circ) = -\tan \theta$$

$$\sec(\theta - 90^\circ) = -\csc \theta \quad \csc(\theta - 90^\circ) = -\sec \theta$$

$$\text{مثال :-} \quad \sin 70^\circ = \cos(90^\circ - 70^\circ) = \cos 20^\circ$$

$$\cos 70^\circ = \sin(90^\circ - 70^\circ) = \sin 20^\circ$$

$$\sin 10^\circ = \cos(90^\circ - 10^\circ) = \cos 80^\circ \quad \cos 10^\circ = \sin(90^\circ - 10^\circ) = \sin 80^\circ$$

$$\sin 20^\circ = \cos(90^\circ - 20^\circ) = \cos 70^\circ \quad \cos 20^\circ = \sin(90^\circ - 20^\circ) = \sin 70^\circ$$

□ الدوال المثلثية للزاوية θ ، $(\theta + 90^\circ)$:-

$$\sin(\theta + 90^\circ) = \cos \theta \quad \cos(\theta + 90^\circ) = -\sin \theta$$

$$\tan(\theta + 90^\circ) = \cot \theta \quad \cot(\theta + 90^\circ) = -\tan \theta$$

$$\sec(\theta + 90^\circ) = \csc \theta \quad \csc(\theta + 90^\circ) = -\sec \theta$$

$$\text{مثال :-} \quad \sin 10^\circ = \cos(90^\circ - 10^\circ) = \cos 80^\circ$$

$$\cos 10^\circ = -\sin(90^\circ - 10^\circ) = -\sin 80^\circ$$

$$\sin 20^\circ = \cos(90^\circ - 20^\circ) = \cos 70^\circ$$

$$\cos 20^\circ = -\sin(90^\circ - 20^\circ) = -\sin 70^\circ$$

مثال :- إذا كانت الزاوية التي يحياها θ من الوضع الصحيح ويرض على الدائرة بالقطعة

$$\left(\frac{y}{r}, \frac{x}{r}\right) \text{ أو } (\sin \theta, \cos \theta) \text{ أو } (\cos \theta, \sin \theta)$$

$$\text{الحل :-} \quad \sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{3}{5} \quad \cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{4}{5}$$

٥ الدوال المثلثية للزوايا غير θ ، $(\theta - 70^\circ)$::

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \sin(\theta - 70^\circ) & \cos \theta &= \cos(\theta - 70^\circ) \\ \sin \theta &= \sin(\theta - 70^\circ) & \cos \theta &= \cos(\theta - 70^\circ) \\ \sin \theta &= \sin(\theta - 70^\circ) & \cos \theta &= \cos(\theta - 70^\circ) \\ \text{مثال} :: & & & \\ \sin 40^\circ &= \sin(70^\circ - 30^\circ) = \sin 70^\circ \cos 30^\circ - \cos 70^\circ \sin 30^\circ \\ \sin 40^\circ &= \sin 70^\circ \cos 30^\circ - \cos 70^\circ \sin 30^\circ \\ \sin 40^\circ &= \sin 70^\circ \cos 30^\circ - \cos 70^\circ \sin 30^\circ \end{aligned}$$

٦ الدوال المثلثية للزوايا غير θ ، $(\theta + 70^\circ)$::

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \sin(\theta + 70^\circ) & \cos \theta &= \cos(\theta + 70^\circ) \\ \sin \theta &= \sin(\theta + 70^\circ) & \cos \theta &= \cos(\theta + 70^\circ) \\ \sin \theta &= \sin(\theta + 70^\circ) & \cos \theta &= \cos(\theta + 70^\circ) \\ \text{مثال} :: & & & \\ \sin 30^\circ &= \sin(70^\circ - 40^\circ) = \sin 70^\circ \cos 40^\circ - \cos 70^\circ \sin 40^\circ \\ \sin 30^\circ &= \sin 70^\circ \cos 40^\circ - \cos 70^\circ \sin 40^\circ \\ \sin 30^\circ &= \sin 70^\circ \cos 40^\circ - \cos 70^\circ \sin 40^\circ \end{aligned}$$

مثال :: أوجد قيمة $\sin 80^\circ \cos 10^\circ + \cos 80^\circ \sin 10^\circ$

$$\begin{aligned} \sin 80^\circ \cos 10^\circ + \cos 80^\circ \sin 10^\circ &= \sin(80^\circ + 10^\circ) = \sin 90^\circ = 1 \\ \sin 80^\circ \cos 10^\circ + \cos 80^\circ \sin 10^\circ &= \sin(80^\circ + 10^\circ) = \sin 90^\circ = 1 \end{aligned}$$

∴ قيمة المقدار حبا ١٠ جا (٣٠) - ظا ٥ = ١ + ١/٢ - ١ × ١/٢ = ١ + ١/٢ = ٣/٢

هـ "علوظه هامه"

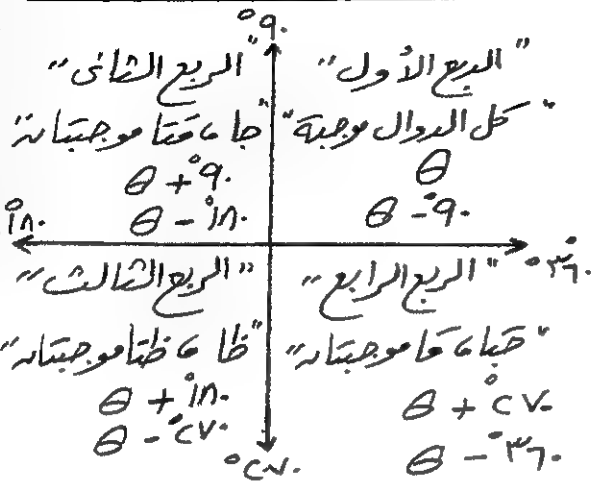
(١) يمكن تخمين ما سيعبر من الرسمه المقابلة ∴

(٢) الدوال المثلثية (٩٠ + θ) ، (٩٠ - θ)

(٣٠ + θ) ، (٣٠ - θ) تتغير في

الدوال المثلثية بوضع حرف القاء من الداله التي

ليس بطل حرف القاء والعكس .



مثال ∴ أوجد بطريقتيه مختلفتين كل ما يأتي ∴ حا ١٠ ، حا ٣٠ ، حا ٥

الحل ∴

$$(١) \text{ حا } ١٠ = \text{جا } (٩٠ + ٣٠)$$

$$\text{حا } ٣٠ = \text{حا } ٣٠ =$$

$$(٢) \text{ حا } ٥ = \frac{\pi}{٣} = \frac{١٨ \times ٥}{٣} = \frac{\pi}{٣}$$

$$\text{حا } ٣٠ = \text{حا } (٣٠ + ٧٠)$$

$$\text{حا } ٣٠ = \text{حا } ٣٠ =$$

$$\text{حا } ١٠ = \text{جا } (٩٠ - ٨٠) = \text{حا } ١٠$$

$$\frac{\pi}{٣} =$$

$$\text{حا } ٣٠ = \text{حا } (٩٠ - ٦٠) = \text{حا } ٣٠$$

$$c =$$

مثال ∴ بدور استخدام الحاسبه أوجد قيمة ∴

$$\text{حا } (١٥٠ - ٦٠) + \text{حا } ٣٠ - \text{حا } (٣٠ - \frac{\pi}{٢}) - \text{حا } ٩٠$$

الحل ∴

$$\text{حا } (١٥٠ - ٦٠) = \text{حا } ٩٠ = \text{حا } (٩٠ - ٨٠) = \text{حا } ١٠$$

$$\text{حا } ٦٠ = \text{حا } (٦٠ - ٦٠) = \text{حا } ٠ = \text{حا } (٦٠ + ٨٠) = \text{حا } ١٤٠$$

$$\boxed{\frac{1}{e}} = 7 - \text{جبا} = (7 - i10) \text{جبا} = 10 - \text{جبا} = \left(\frac{10 \times 5}{3}\right) \text{جبا} = \left(\frac{\pi}{3}\right) \text{جبا} \therefore$$

$$\boxed{\frac{1}{e}} = 33 - \text{جا} = (30 - i20) \text{جا} = 20 - \text{جا} = 33 - \text{جا} \therefore$$

$$\boxed{e7} = 50 - \text{جا} = (50 + i10) \text{جا} = 100 - \text{جا} = \left(\frac{10 \times 50}{2}\right) \text{جا} = \frac{\pi}{2} \text{جا} = \left(\frac{\pi}{2}\right) \text{جا} \therefore$$

$$\boxed{\text{صفر}} = 90 - \text{ظا} = (360 \times 90 - 90) \text{ظا} = 10 - \text{ظا} \therefore$$

$$\therefore \text{قيمة المقدار} = \frac{360}{e} \times \frac{360}{e} + \frac{1}{e} \times \frac{1}{e} - \text{صفر} \times (e7 -)$$

$$\# \boxed{\text{II}} = 0 - \frac{1}{e} + \frac{3}{e} =$$

* * * ترتيب * برون استخدام الحاسبة أو جد قيمه :-

$$(1) \text{جا} 10 - \text{جا} 33 - \text{جبا} (33 -)$$

$$(2) \text{جا} 90 - \text{جبا} (90 -) + \text{جا} 50 - \text{جبا} (50 -)$$

مثال :- إذا كانت جبا $\theta = \frac{\pi}{6}$ حيث $90 > \theta > 180$ أوجد قيمه ما يأتي

$$(3) \text{جبا} (\theta -)$$

$$(1) \text{جا} (180 - \theta)$$

$$(4) \text{ظا} (180 - \theta)$$

$$(2) \text{جا} (360 - \theta)$$

الحل :- لاني نقطه على دائرة الوحدة $\sin + \cos = 1$

$$\therefore \text{جبا} \theta = \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \text{النقطه هي} \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\pi}{6}\right) + \left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{17}{60} + \frac{1}{60} = 1 \Leftrightarrow \frac{17}{60} = 1 - \frac{1}{60} = \frac{59}{60} = \frac{9}{60}$$

$$\sin = \pm \sqrt{\frac{9}{60}} = \left(\pm \frac{3}{\sqrt{60}}\right) \therefore \theta \text{ تقع في الربع الثاني} \therefore \sin = \frac{3}{\sqrt{60}}$$

$$\therefore \text{جا} (180 - \theta) = \text{جا} \theta = \frac{3}{\sqrt{60}} \text{ و } \therefore \text{جا} (360 - \theta) = \text{جا} \theta = \frac{3}{\sqrt{60}}$$

$$\therefore \text{جبا} (\theta -) = \text{جبا} \theta = \frac{3}{\sqrt{60}} \text{ و } \therefore \text{ظا} (180 - \theta) = \text{ظا} (\theta -) = \text{ظا} \theta = \frac{3}{\sqrt{60}}$$

$$\text{ظا} \theta = (\text{ظا} \theta -) = (\theta - i10) \text{ظا} =$$

$$\boxed{\frac{3}{e}} =$$

الوحدة في النقطة (س) $(\frac{12}{13})$ حيث $(9. > \theta > 180)$ أو هـ قـ مـ :-

١٠ "ملفوظه هامة جدا"

نشان $\boxed{90^\circ = \beta + \alpha}$ حيث α, β زاویه های حاد است. \therefore

$$\dot{q} = \dot{r}_x - \theta \dot{c} + \dot{c} \dot{\lambda} + \theta \dot{r}_x \therefore (\dot{r}_x - \theta \dot{c}) \dot{\phi} = (\dot{c} \dot{\lambda} + \theta \dot{r}_x) \dot{\phi} \therefore$$

«لاحظ أنه توجد قيم أخرى تحقق المعادلة السابقة وتختصر بـ 9.6»

مثل ٨٧٦ ولا يجاد هذه القيم لا بد من حل هذا النوع من المسائل باستخدام القانون العام لتعظيم للملاحظة السابقة :-

$\forall \theta \in N^6 \quad n\pi c + \frac{\pi}{c} = \beta \pm q \Rightarrow \sqrt{37} + 9 = \beta \pm q : \text{فإن } \beta \neq q = q \text{ إذا كان } \textcircled{1}$

$$\omega \ni v. \quad v\pi + \underline{II} = \beta + \alpha \geq 1 \quad v\dot{n} + \dot{9} = \beta + \alpha : v\dot{6} \beta \dot{6} = \alpha \dot{6} v\dot{6} \dot{6}! \textcircled{P}$$

مثال :- أوجد الحل العام للمعادلات الآتية :-

$$(١) \quad \sin \theta = \sin 3\theta$$

$$(٢) \quad \sin \theta = \sin 2\theta$$

$$(٣) \quad \sin \theta = \sin 5\theta$$

$$(٤) \quad 1 = (\theta - \frac{\pi}{2})$$

الحل :-

$$(١) \quad \sin \theta = \sin 3\theta \Leftrightarrow \theta = 3\theta \text{ أو } \theta = \pi - 3\theta$$

$$\sin \theta = \sin 3\theta \text{ أو } \sin \theta = \sin (\pi - 3\theta)$$

$$\sin \theta = \sin 3\theta \text{ أو } \sin \theta = \sin (\pi - 3\theta)$$

$$\sin \theta = \sin 3\theta \Leftrightarrow \theta = 3\theta$$

$$\sin \theta = \sin 3\theta \Leftrightarrow \theta = 3\theta$$

∴ الحل العام هو $\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ أو $\theta = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$

$$(٢) \quad \sin \theta = \sin 2\theta \Leftrightarrow \theta = 2\theta \text{ أو } \theta = \pi - 2\theta$$

$$\sin \theta = \sin 2\theta \text{ أو } \sin \theta = \sin (\pi - 2\theta)$$

$$\sin \theta = \sin 2\theta \text{ أو } \sin \theta = \sin (\pi - 2\theta)$$

$$(٣) \quad \sin \theta = \sin 5\theta \Leftrightarrow \theta = 5\theta \text{ أو } \theta = \pi - 5\theta$$

$$(٤) \quad 1 = (\theta - \frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2} + 1$$

$$\sin \theta = \sin 5\theta \Leftrightarrow \theta = 5\theta$$

$$\sin \theta = \sin 5\theta \Leftrightarrow \theta = 5\theta$$

∴ الحل العام هو $\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ أو $\theta = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$

$$(٥) \quad 1 = (\theta - \frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2} + 1$$

∴ $\theta = \frac{\pi}{2} + 1$ (موجبة) ∴ تقع في الربع الأول أو الرابع

$$\frac{\pi}{2} = \theta \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \text{ أو } \theta = \frac{3\pi}{2}$$

∴ الحل العام هو $\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ أو $\theta = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$

تمارين على الزوايا المتسبة

□ أمل ما يأتي :-

(١) $\sin(\theta - 90^\circ) = \dots$

(٢) $\cos(\theta - 180^\circ) = \dots$

(٣) $\tan(\theta - 270^\circ) = \dots$

(٤) $\sec(\theta + 90^\circ) = \dots$

(٥) $\csc \theta = \dots$

(٦) $\sec \theta = \dots$

(٧) $\csc \theta = 13$ فما $\sec \theta = \dots$

(٨) $\sec \theta = 67$ فما $\csc \theta = \dots$

(٩) إذا كانت $\sin \theta = \cos \theta$ حيث $0 < \theta < 90^\circ$ فما $\theta = (\hat{\theta}) \dots$

(١٠) إذا كانت $\sin \theta = \cos \theta$ فما θ زاوية حادة موجبة فما $\theta = \dots$

(١١) إذا كان $\sin \theta = \cos \theta$ فما θ زاوية حادة موجبة فما $\theta = \dots$

(١٢) إذا كان $\sin \theta = \cos \theta$ فما θ زاوية حادة موجبة فما $\theta = \dots$

(١٣) إذا كان $\sin \theta = \cos \theta$ فما θ زاوية حادة موجبة فما $\theta = (\hat{\theta}) \dots$

(١٤) إذا كان $\sin \theta = \cos \theta$ فما θ زاوية حادة موجبة فما $\theta = (\beta + \alpha) \dots$

(١٥) إذا كان $\sin \theta = \cos \theta$ فما θ زاوية حادة موجبة فما $\theta = (\theta - 90^\circ) \dots$

(١٦) إذا كان $\sin \theta = \cos \theta$ فما θ زاوية حادة موجبة فما $\theta = (\hat{\theta}) \dots$

□ أوجد قيمة ما يأتي :-

(١) $\sin 15^\circ + \cos 75^\circ = \dots$

(٢) $\sin 11^\circ + \cos 79^\circ = \dots$

(٣) أثبت أنه :- $\sin 10^\circ + \cos 80^\circ = 1$

□ إذا كان الضلع النشط في زاوية قياسها θ في مثلث قائم الزاوية يقطع دائرة الوحدة

في النقطة $(\frac{x}{r}, \frac{y}{r})$ أوجد :-

(١) $\sin \theta$ ، $\cos \theta$ ، $\tan \theta$ ، $\sec \theta$ ، $\csc \theta$ ، $\cot \theta$ ، $\theta = \dots$

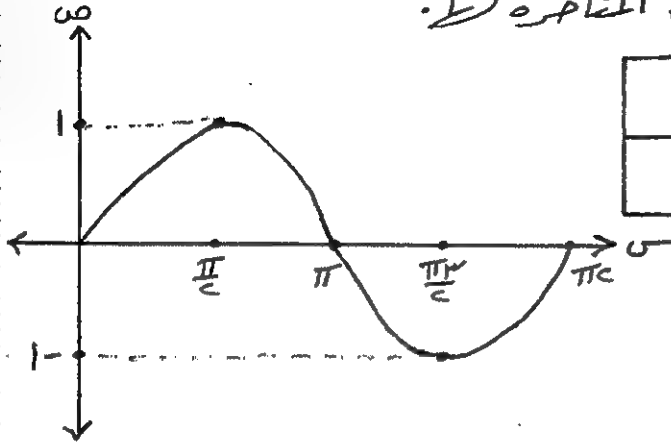
د) التحليل البياني للدوال المثلثية

□ دالة الجيب :-

لتحليل الدالة $y = \sin(\theta)$ نكتب جدول من بعض قيم θ

الخاصة حيث $\theta \in [0, \pi]$ وقيم $\sin \theta$ المناظرة لها .

θ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin \theta$	0	1	0	-1	0



نرسم منحنى الدالة كما بالشكل :-

* خواص دالة الجيب :-

(1) الدالة دورية وطول دورتها 2π .

(2) مجال الدالة $[-1, 1]$ وقيم الدالة $[-1, 1]$.

(3) القيمة العظمى للدالة تساوي 1 وذلك عندما $\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$k \in \mathbb{Z}$

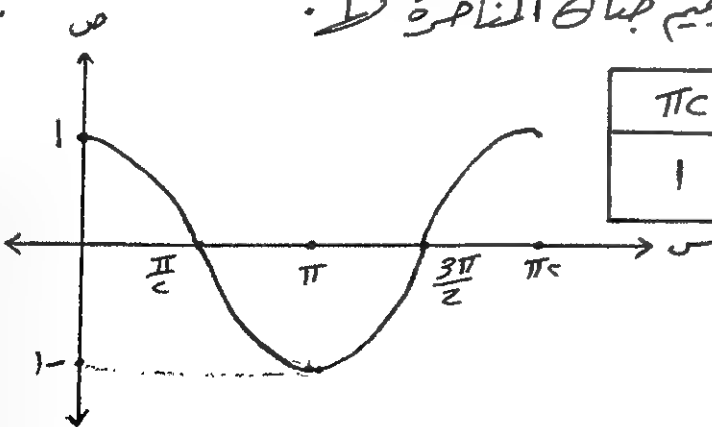
(4) القيمة الصغرى للدالة تساوي -1 وذلك عندما $\theta = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$

□ دالة جيب التمام :-

لتحليل الدالة $y = \cos(\theta)$ نكتب جدول من بعض قيم θ

الخاصة حيث $\theta \in [0, \pi]$ وقيم $\cos \theta$ المناظرة لها .

θ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos \theta$	1	0	-1	0	1



نرسم منحنى الدالة كما بالشكل :-

* خواص دالة جيب التمام :-

(1) الدالة دورية وطول دورتها 2π .

(١) مجال الدالة $[-\infty, \infty]$ ومدى الدالة $[-1, 1]$

(٢) القيمة العظمى للدالة تساوي ١ وزلا عند $\theta = \pi/2$

٥٥٣

(٣) القيمة الصغرى للدالة تساوي -١ وزلا عند $\theta = 3\pi/2$

ملحوظة هامة

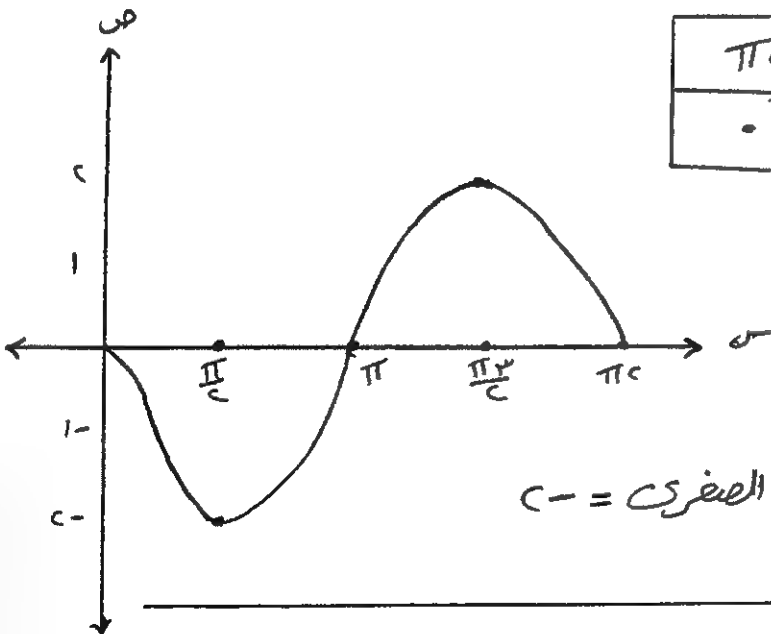
كل من الدالتين: $y = \sin x$ و $y = \cos x$ جتا بس دوال دورية ودورتها 2π ومراحها $[-1, 1]$ حيث P موجبة.

نمثال: • الدالة $y = \sin x$ مرارها $[-1, 1]$ ودورتها 2π .

• الدالة $y = \cos x$ مرارها $[-1, 1]$ ودورتها 2π .

مثال: -- ارسم منحنى الدالة $y = \sin x$ جتا ٣ على الفترة $[0, 2\pi]$

الخط: --



θ	٠	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
مرارها	٠	١	٠	-١	٠

الدالة دورية ودورتها 2π

المجال $[-\infty, \infty]$

المدى $[-1, 1]$

القيمة العظمى للدالة = ١ ، القيمة الصغرى = -١

* * * نرسم منحنى الدالة $y = \sin x$ جتا ٣ على الفترة $[0, 2\pi]$ * * *

تمارين على "رسم الدوال المثلثية"

□ أمل ما يأتي :-

- (١) مدى الدالة د حيث $D = \theta$ جـ θ هو وطول دورته
- (٢) مدى الدالة د حيث $D = \theta$ جـ θ هو وطول دورته
- (٣) القيمة العظمى للدالة ع : ع θ = جـ θ هو
- (٤) القيمة الصغرى للدالة ع : ع θ = جـ θ هو
- (٥) الدالة د θ = جـ θ دالة دورية ودورها تساوي

□ ارسم الشكل البياني لكل من الدوال الآتية حيث $\theta \in [0, 2\pi]$
وعبر القيمة العظمى والصغرى والذى لكل من الدوال الآتية

- | | |
|------------------------------|--------------------------|
| (١) د θ = جـ θ | (٢) ص = جـ θ |
| (٣) ص = جـ θ | (٤) ص = جـ θ |
| (٥) ص = جـ θ | (٦) ص = جـ θ + ١٠ |

"إيجاد قياس زاوية معلومة إحدى نسبتي الثلثة"

* وإذا كانت $\sin \theta = \frac{1}{2}$ فإنه يمكن إيجاد قيمة θ معلومة θ

فمثلاً: إذا كانت $\theta = 30^\circ \Rightarrow \sin \theta = \frac{1}{2} = \sin 30^\circ$

"والسؤال هنا" هل يمكن إيجاد θ معلومة $\sin \theta = \frac{1}{2}$!!

هناك صورة تستخدم لإيجاد θ معلومة $\sin \theta = \frac{1}{2}$:

فإذا كانت $\sin \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \sin^{-1} \left(\frac{1}{2} \right)$

فمثلاً: إذا كانت $\sin \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \sin^{-1} \left(\frac{1}{2} \right) = 30^\circ$ فإنه $\theta = 30^\circ$

"أي نجد على الزاوية الحادة الموجهة التي جيبها يساوي $\frac{1}{2}$ وهو 30° "

ونكتب على الحاسبة بالصورة: $\Rightarrow \sin^{-1} \left(\frac{1}{2} \right) = 30^\circ$

مثال ①: أوجد قيمة θ حيث $\theta > 0^\circ$ والـ تحقق كل واحد

- | | | |
|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|
| (أ) $\sin \theta = \frac{1}{2}$ | (ب) $\cos \theta = \frac{1}{2}$ | (ج) $\tan \theta = \frac{1}{2}$ |
| (د) $\csc \theta = 2$ | (هـ) $\sec \theta = 2$ | (و) $\cot \theta = 2$ |

الحل:

(أ) جيب تمام الزاوية موجب $\therefore \theta$ تقع في الربع الأول أو الرابع

الأول $\Rightarrow \theta = 30^\circ$ الرابع $\Rightarrow \theta = 150^\circ = 180^\circ - 30^\circ$

\therefore قيم $\theta = 30^\circ, 150^\circ$

(ب) ظل الزاوية موجب $\therefore \theta$ تقع في الربع الأول أو الثالث

الأول $\Rightarrow \theta = 60^\circ$ الثالث $\Rightarrow \theta = 120^\circ = 90^\circ + 30^\circ$

\therefore قيم $\theta = 60^\circ, 120^\circ$

(٤) ∴ جيب الزاوية سالب ∴ تقع في الربع الثالث أو الرابع

$$\text{الثالث} \Leftarrow \theta = 180^\circ + 30^\circ = 210^\circ \quad \text{الرابع} \Leftarrow \theta = 360^\circ - 30^\circ = 330^\circ$$

$$\therefore \text{قيم } \theta = 210^\circ \text{ أو } 330^\circ$$

$$(٥) \therefore \theta = 270^\circ \Leftarrow \theta = 90^\circ \text{ جيباً } \frac{1}{\sqrt{2}}$$

∴ جيب تمام الزاوية موجب ∴ تقع في الربع الأول أو الرابع

$$\text{الأول} \Leftarrow \theta = 60^\circ \quad \text{الرابع} \Leftarrow \theta = 360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$$

$$\therefore \text{قيم } \theta = 60^\circ \text{ أو } 300^\circ$$

(١) ∴ جيب الزاوية موجب ∴ تقع في الربع الأول أو الثاني

$$\text{الأول} \Leftarrow \theta = 30^\circ \quad \text{الثاني} \Leftarrow \theta = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$$

(٦) ∴ ظل تمام الزاوية سالب ∴ تقع في الربع الثاني أو الرابع

$$\text{يستخدم الحاسبة} \leftarrow \tan^{-1} 2 = 63.43^\circ \quad \text{Shift } \tan(1.6204) = 1.1071$$

$$\text{الثاني} \Leftarrow \theta = 180^\circ - 63.43^\circ = 116.57^\circ \quad \text{الرابع} \Leftarrow \theta = 360^\circ - 63.43^\circ = 296.57^\circ$$

$$\therefore \text{قيم } \theta = 116.57^\circ \text{ أو } 296.57^\circ$$

* ترتيب * أوجد θ حيث $0^\circ < \theta < 360^\circ$ والتي تحقق كل معادلة

$$(١) \sin \theta = \frac{1}{2} \quad (٢) \cos \theta = \frac{1}{2}$$

$$(٣) \tan \theta = 1 \quad (٤) \cot \theta = 1$$

مثال ٥ ∴ إذا قطع الضلع النشط لزاوية موجبة قياسها θ من وحدة الدائرية دائرة

الوحدة من النقطة ب $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ فأوجد θ حيث $0^\circ < \theta < 360^\circ$

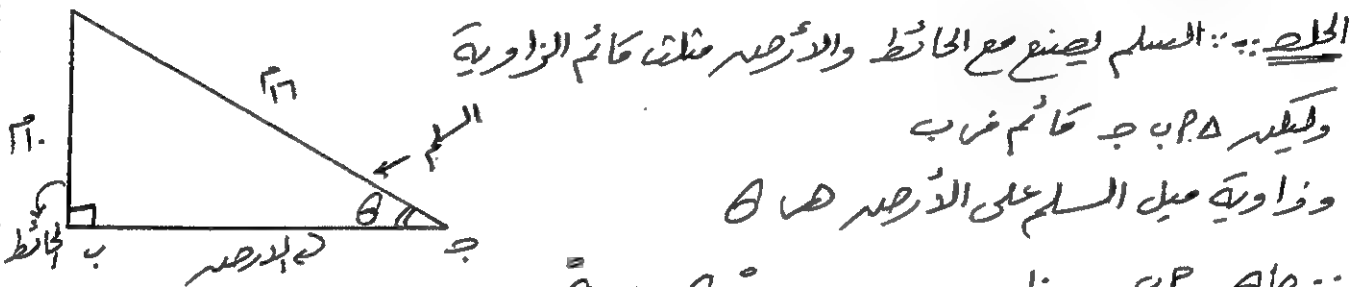
الحل ∴ ∴ النقطة ب $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ تقع في الربع الثاني ∴ $\sin \theta = \frac{4}{5}$ $\cos \theta = -\frac{3}{5}$

∴ الزاوية المدمجة تقع في الربع الثاني

$$\therefore \cos \theta = \frac{1}{5} \Rightarrow \theta = \cos^{-1} \frac{1}{5} = \cos^{-1} 0.2 = 78.69^\circ$$

$$\therefore \theta = 180^\circ - 78.69^\circ = 101.31^\circ$$

مثال ٣ سلم طوله ١٦ متر يستند على حائط رأس وأرض أفقية فإذا كان ارتفاع السلم عند سطح الأرض يساوي ١٠ متر أوجد بالراديان زاوية ميل السلم على الأرض θ



الحل: ∴ السلم يصنع مع الحائط والأرض مثلث قائم الزاوية

وطبقاً لـ P.5 ب ج قائم ضرب

وزاوية ميل السلم على الأرض هي θ

$$\therefore \cos \theta = \frac{10}{16} \Rightarrow \theta = \cos^{-1} \frac{10}{16} = \cos^{-1} 0.625 = 51.31^\circ$$

$$\therefore \theta = \cos^{-1} \frac{10}{16} = \cos^{-1} 0.625 = 51.31^\circ$$

$$\therefore \theta = \cos^{-1} \frac{10}{16} = \cos^{-1} 0.625 = 51.31^\circ$$

تأديده على " إيجاد قياس زاوية معلومة إحدى نسب المثلث "

آمل :-

(١) إذا كان $\cos \theta = 0.2$ حيث θ حادة موجبة فإنه $\theta = \cos^{-1}(0.2) = 78.69^\circ$

(٢) إذا كان $\cos \theta = 0.2$ وكانت $90^\circ < \theta < 180^\circ$ فإنه $\theta = \cos^{-1}(0.2) = 101.31^\circ$

(٣) إذا كانت $90^\circ < \theta < 180^\circ$ فأوجد θ التي تحقق كلا ما يأتي :-

(١) $\cos \theta = 0.3766$ (٢) $\sin \theta = 0.6743$ (٣) $\tan \theta = 0.5071$

(٤) إذا قطع الضلع المنطقي للزاوية θ من الضلع القياسي دائرة الوحدة من النقطة

(نقطة ١) أوجد θ حيث $90^\circ < \theta < 180^\circ$

مثال ٤ سلم طوله ٢٠ متر يستند على حائط رأس فإذا كان ارتفاع السلم عند سطح الأرض ١٣ متر أوجد بالراديان زاوية ميل السلم على الأرض.

تمارين عامة

أجب عن الأسئلة الآتية مقرياً الناتج لأقرب رقمين عشريين:

① حول الزوايا الآتية من درجات إلى راديان:

_____ ° ١٢٠ _____ ° ٦٤,٨ _____ ° ٢٢٠,٣٦

② حول الزوايا الآتية من راديان إلى درجات:

_____ $\frac{\pi}{3}$ _____ $\frac{\pi}{2} -$ _____ $\frac{\pi}{4}, ١٢$

③ θ زاوية مركزية في دائرة طول نصف قطرها ١٠ وتحصر قوساً طوله ١ :

_____ إذا كان $١٠ = \text{سم}$ ، $\theta = ١,٢$ أوجد $ل$.

_____ إذا كان $ل = ٢٦$ سم، $١٨ = \text{سم}$ أوجد θ بالدرجات.

④ بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة كل مما يأتي:

_____ ظا ١٢٠° _____ جتا $(\frac{\pi}{4})$ _____ جتا ٣٠° _____ ظتا (-٢٠٠°) _____ قتا $(\frac{\pi}{4})$

⑤ أوجد جميع الدوال المثلثية للزاوية θ إذا كان الضلع النهائي مرسوماً في الوضع القياسي ويمر بكل نقطة من النقاط الآتية:

_____ $(٣, ٤)$ _____ $(١٢, -٥)$ _____ $(٢, -\frac{2}{3})$ _____ $(٢, ٥٦٠)$

⑥ أثبت أن:

أولاً: جتا $٦٠^\circ = ٢$ جتا ٣٠° جتا ٣٠° ثانياً: جتا $٣٠^\circ = ٢$ جتا ٦٠° -

⑦ إذا كانت جتا $\theta = -\frac{4}{5}$ حيث $٩٠^\circ < \theta < ١٨٠^\circ$ فأوجد قيمة كل من:

أولاً: جتا $(\theta - ١٨٠^\circ)$ ثانياً: ظا $(\theta - ١٨٠^\circ)$

⑧ أوجد قياس الزوايا بالدرجات في الفترة $0^\circ \leq \theta \leq ٣٦٠^\circ$ لكل مما يأتي:

_____ ظا ١٣٠° _____ جتا $(\frac{1}{3})$ _____ جتا $(-\frac{3}{4})$ _____ ظا $(٣٦٠ -)$

⑨ منحدرًا طوله ٢٤ مترًا، وارتفاعه عن سطح الأرض ٩ أمتار، اكتب دالة مثلثية يمكن استخدامها لإيجاد قياس زاوية ميل المنحدر مع الأرض الأفقية، ثم أوجد قياسها.

اختبار الوحدة

اختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاه.

- ١) الزاوية ٥٨٥° تكافئ في الوضع القياسي الزاوية التي قياسها:
- ☐ ٤٥°
☐ ١٣٥°
☐ ٢٢٥°
☐ ٣١٥°

- ٢) إذا كان $\theta > ٠$ ، $\theta < ٠$ فإن زاوية تقع θ في الربع:
- ☐ الأول
 ☐ الثاني
 ☐ الثالث
 ☐ الرابع

- ٣) إذا كانت θ زاوية حادة وكان θ جتا $(\theta + ٢٠)^\circ =$ جتا ٢٠° فإن θ تساوي:
- ☐ ٢٠°
☐ ٢٠°
☐ ٤٠°
☐ ٥٠°

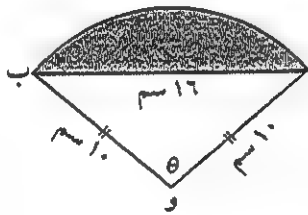
- ٤) الزاوية (-٨٥٠°) تقع في الربع:
- ☐ الأول
 ☐ الثاني
 ☐ الثالث
 ☐ الرابع

- ٥) قياس الزاوية بالدرجات التي تقابل قوساً طوله π في دائرة طول نصف قطرها ٩ سم تساوي:
- ☐ ٣٠°
☐ ٦٠°
☐ ١٢٠°
☐ ١٥٠°

- ٦) أبسط صورة للمقدار: جتا $(\theta + ١٨٠)^\circ +$ جتا $(\theta + ٩٠)^\circ$ يساوي:
- ☐ ٢
☐ جتا θ
☐ جتا θ
☐ ٢ جتا θ

- ٧) $\csc(-٢٠^\circ)$ تساوي:
- ☐ $-\csc ٢٠$
☐ $\csc ٢٠$
☐ $-\frac{1}{\csc ٢٠}$
☐ $\frac{1}{\csc ٢٠}$

أجب عن الأسئلة الآتية:



- ٨) \overline{AB} قوس في دائرة مركزها O وطول نصف قطرها ١٠ سم، $AB = ١٦$ سم. أوجد θ بالقياس الدائري ثم أوجد طول القوس \overline{AB} :

- ٩) إذا كان ٥ جتا $١ = ٤$ حيث $٩٠^\circ < ١ < ١٨٠^\circ$

فأوجد قيمة المقدار جتا $(١ - ١٨٠)^\circ +$ جتا $(١ - ٣٢٠)^\circ +$ جتا $(١ - ٢٧٠)^\circ$

- ١٠) أوجد في أبسط صورة قيمة المقدار: جتا ١٢٠° جتا $٣٣٠^\circ -$ جتا ٤٢٠° جتا $(-٣٠)^\circ$.

- ١١) أوجد بالرديان θ إذا كان ٢ جتا $١ + \csc ٣٦ = ٠$ حيث θ قياس زاوية حادة.

- ١٢) إذا كان الضلع النهائي للزاوية في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة عند النقطة $(\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ فأوجد قيمة كل من: θ ، $\csc \theta$

- ١٣) أوجد الدوال المثلثية الأساسية للزاوية θ إذا كان الضلع النهائي مرسومًا في الوضع القياسي ويمر بالنقطة $(٨, -٦)$

اختبار تراكمي

أولاً: أسئلة الاختيار من متعدد

١٠ أي من الزوايا الآتية يكون الجيب وجيب التمام لها ساليين:

٣٣٠°

٢٢٠°

١٤٠°

٤٠°

١١ قياس الزاوية المركزية التي تقابل قوساً طوله π^2 في دائرة طول نصف قطرها ٦ سم يساوي:

$\frac{\pi}{3}$

$\frac{\pi}{2}$

$\frac{\pi}{4}$

$\frac{\pi}{6}$

١٢ إذا كان $\theta = \theta_2$ ظلًا $\theta = \theta_2$ حيث θ زاوية حادة موجبة فإن $\theta - 90^\circ$ تساوي:

١

$\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\frac{1}{2}$

ثانياً: أجب عن الأسئلة الآتية:

١٣ إذا كان الضلع النهائي للزاوية θ في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة عند النقطة $(\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ فأوجد قيمة كل من ظل θ ، قتا θ .

١٤ بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد (إن أمكن ذلك) قيمة كل من:

ظل $(-\frac{\pi}{3})$

قا $\frac{\pi}{3}$

جا (-135°)

جتا 210°

١٥ إذا كان الضلع النهائي للزاوية $(\theta - 90^\circ)$ حيث θ زاوية حادة موجبة، يقطع دائرة طول نصف قطرها ٥ وحدات طول في النقطة (ϵ, κ) فأوجد:

قيمة κ

جتا $(\theta - 90^\circ)$

جا $(\theta - 90^\circ)$

قا $(\theta - 90^\circ)$

١٦ دلائل: يصعد كريم بدراجته منحدرًا يميل على الأفقى بزاوية قياسها 100° في الوضع القياسي

اكتب دالة مثلثية تبين العلاقة بين أطول المنحدر.

أوجد قيمة الأقرب عشرين.

مكتبة وسام

شويين - شارع حسني مبارك - خلف الثانوية بنات

01004423597.3943035

الإيداع

في الرياضيات

ثالثاً:

الهندسة

الوحدة الثالثة (التشابه)

(١) تشابه المضلعات

(٢) تشابه المثلثات

(٣) تابع تشابه المثلثات

(٤) العلاقة بين مساحتي سطحي مضلعين متشابهين

(٥) تطبيقات التشابه في الدائرة

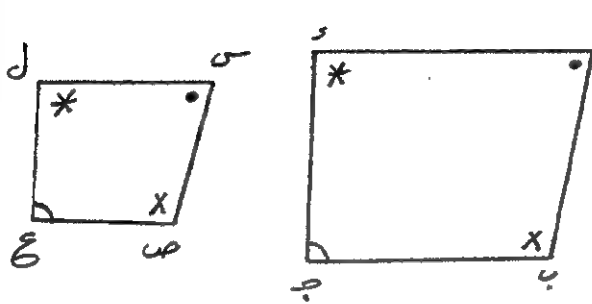
تمارين عامة علي الوحدة

اختبار الوحدة

(١) تشابه المضلعات

تعريف :-

يقال لمضلعين (مختلفين العدد من الأضلاع) أنهما متشابهان إذا تحققت الشرطتين الآتيتين معًا :-
(١) الزوايا المتناظرة متساوية من القياس (مطابقة) .



(٢) أطوال الأضلاع المتناظرة متناسبة .
* من الشكل المقابل :- إذا كان :-

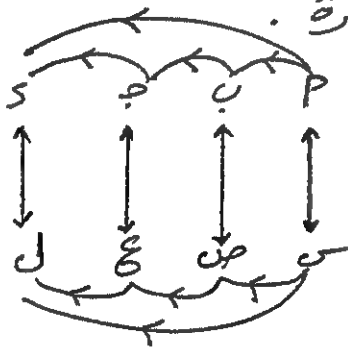
$$\textcircled{1} \quad \frac{PQ}{AB} = \frac{QR}{BC} = \frac{RS}{CD} = \frac{SP}{DA} \quad \text{و} \quad \angle A = \angle P, \angle B = \angle Q, \angle C = \angle R, \angle D = \angle S$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{PQ}{AB} = \frac{QR}{BC} = \frac{RS}{CD} = \frac{SP}{DA} = k$$

فإنه المضلع PQRS يشابه المضلع ABCD "والعلامة k تسمى التشابه"

ملاحظات هامة :-

١ يجب كتابة المضلعين المتشابهين بنفس ترتيب رؤسهما المتناظرة .



فإذا كان المضلع PQR يشابه المضلع ABCD فإنه

$$\frac{PQ}{AB} = \frac{QR}{BC} = \frac{RS}{CD} = \frac{SP}{DA} = k$$

$$\text{و} \quad \angle A = \angle P, \angle B = \angle Q, \angle C = \angle R, \angle D = \angle S$$

ولذلك فإن تشابه المضلع PQR يشابه المضلع ABCD = k

حيث k =

$$\frac{1}{k} \quad \text{أما} \quad k = \frac{PQ}{AB} = \frac{QR}{BC} = \frac{RS}{CD} = \frac{SP}{DA}$$

٢ لكن تشابه مضلعين يجب توافر الشرطين معًا ولا يكفي توافر أحدهما دون الآخر .

مثلاً :-

• المربع والمستطيل مضلعان غير متشابهين (لماذا؟)

• المربع والمضلع مضلعان غير متشابهين (لماذا؟)

• ليست جميع المستطيلات متشابهة وكذلك المثلثات ومتوازيات الأضلاع

الابداع في الرياضيات

② المضاعف الخارج لهالك مضاعف.

⑤ أي مضاعف منقح من نفس العدد الذي مضاعف متتابع.

نظراً :- • جميع المنظمات المتساوية الأضلاع متشابهة

• جميع المربعات متشابهة

• جميع الأشكال الخماسية المنتظمة متشابهة وهكذا....

⑦ إذا كان المضلع n المضلع m فإن $\frac{\text{محيط المضلع } n}{\text{محيط المضلع } m} = \text{معامل التشابه}$

آی اے :- النسبة بين محيط مضلعين متشابهين = النسبة بين طولي ضلعين متناظرين فيهما

(٧) كَيْدُهُ لَهُ صَوْرَتَانِ تَشَابَهَ الْمَضْلَعُ الْمَضْلَعُ

* إذا كان له ١ فإما المصطلح ٢ هو تعبير للمصطلح ٣ .

* إذا كان α دالة في \mathcal{D} فإن α هو تصغير للمضلع α .

* إذا كان $e = 1$ فإن المصطلح $\frac{1}{n}$ يطابق المصطلح $\frac{1}{n}$.

سؤال ① :- خذ الشكل المقابل :-

المضلع P بجوار المضلع ه و ن

(۷) اودھ معامل تشابہ المضلع ابھی المضلع ہونے

(۲) اوجہ قدیم سے ۶ ص

(٣) إذا كان محيط المضلع P بـ $5 = 2r$ سم. أوجد محيط المضلع H ووضح.

الحل :- :- المضلع P بجوار المضلع H وزح

فيلكون $\frac{P}{D} = \frac{B.B}{D} = \frac{S.P}{D} = \frac{S.P}{L.D} = \text{معامل النشابة}$

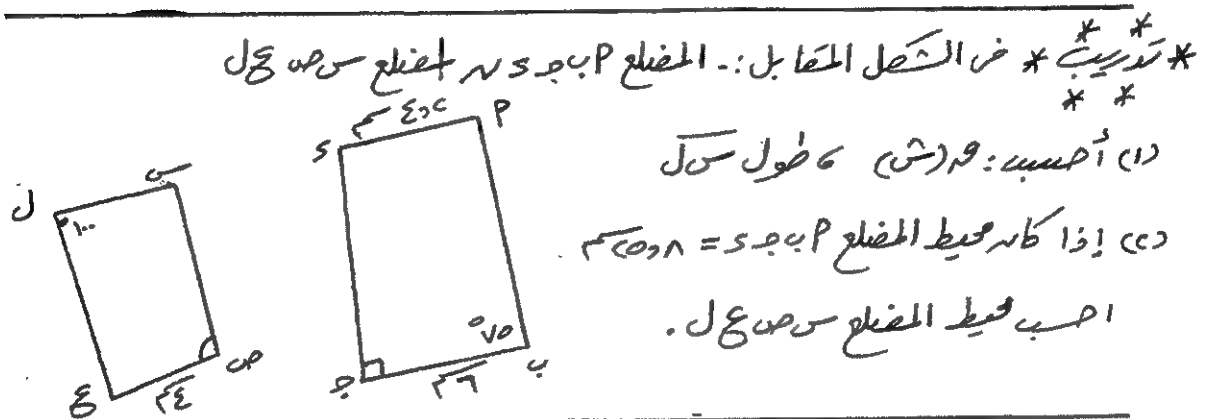
$$\boxed{\frac{3}{2}} = \frac{15}{1} = \text{مفاعل النسخة} \Leftarrow \frac{15}{1} = \frac{10}{5} = \frac{20}{10} = \frac{5+5}{7} \Leftarrow$$

$$9 = \frac{7 \times 12}{8} = c + 12 \Leftrightarrow \frac{12}{8} = \frac{c+12}{7} \text{ ثم } = \frac{12 \times 10}{12} = 10 \Leftrightarrow \frac{12}{8} = \frac{10}{7} \therefore$$

$$c + 12 = 9 \Leftrightarrow c = -3$$

$$\frac{3}{2} = \frac{20}{\text{محيط المضلع هـ وزح}} \Leftrightarrow \text{محيط المضلع هـ وزح} = \frac{20 \times 2}{3} = \frac{40}{3}$$

$$\therefore \text{محيط المضلع هـ وزح} = \frac{40 \times 20}{3} = \frac{800}{3}$$



مثال ٥ :- مضلعاه متشابهان أحدهما أطوال أضلاعه ١٠، ٨، ٦، ٥، ٣، ٣

والآخر محيطه ٤٨ سم. أوجد أطوال أضلاع المضلع الثاني.

الحل :- بفرض المضلعاه هما P بـ جـ دـ هـ سـ مـ عـ لـ

حيث P بـ جـ دـ هـ سـ مـ عـ لـ = ٤٨ سم، جـ دـ = ٥ سم، دـ هـ = ٣ سم، هـ سـ = ٣ سم، سـ مـ = ٦ سم، مـ عـ = ٨ سم، عـ لـ = ١٠ سم

ومحيط المضلع سـ مـ عـ لـ = ٤٨ سم

∴ المضلع P بـ جـ دـ هـ سـ مـ عـ لـ

« فواصل التناسب »

$$\frac{P}{S} = \frac{B}{M} = \frac{J}{E} = \frac{D}{C} = \frac{H}{L} \therefore \frac{P}{S} = \frac{B}{M} = \frac{J}{E} = \frac{D}{C} = \frac{H}{L}$$

$$\left[\frac{P}{S} \right] = \frac{36}{48} = \frac{10+8+6+5+3}{48} = \frac{10}{48} = \frac{5}{24} = \frac{7}{16} = \frac{5}{8} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow$$

$$\therefore S = 48 = \frac{3 \times 32}{4} = 240 \text{ سم، } E = 8 \text{ سم، } C = 12 \text{ سم، } L = 15 \text{ سم، } M = 10 \text{ سم، } H = 15 \text{ سم}$$

#

تمارين على "تشابه مضلعين"

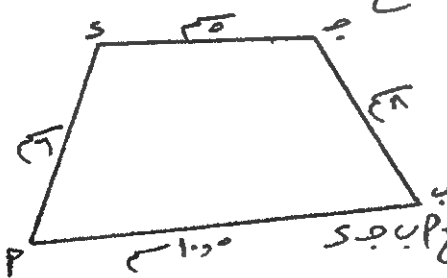
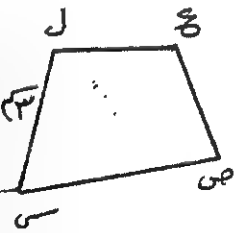
١) أكل ما يأتي :-

- (١) المضلعان المشابريان لثالث
- (٢) أي مضلعين منتظمين لهما نفس العدد من الأضلاع يكونان
- (٣) وإذا كان معامل التشابه لمضلعين = ١ فإن المضلعين
- (٤) المثلثان المتساويان الأضلاع
- (٥) مستطيل ذهبي عرضه ٧ سم فإن طوله سم
- (٦) إذا كانت النسبة بين طولي ضلعين متناظرين في مضلعين متشابهين ٣ : ٥ فإن النسبة بين محيطيهما
- (٧) مضلعان متشابهان النسبة بين طولي ضلعين متناظرين فيهما ٣ : ٤ فإذا كان محيط المضلع الأصغر ٥٨ سم فإن محيط المضلع الأكبر سم
- (٨) إذا كان المضلع P ب ج د س ر المضلع س م ن ج ل فإن :-

$$\frac{BP}{SM} = \frac{JD}{SN} = \frac{DS}{NL} = \frac{SR}{JM} = \frac{RP}{ML}$$
- (٩) إذا كان المضلع P ب ج د س ر المضلع س م ن ج ل س فإن :-

$$\frac{BP}{SM} = \frac{JD}{SN} = \frac{DS}{NL} = \frac{SR}{JM} = \frac{RP}{ML}$$

٢) من الشكل المقابل :- المضلع P ب ج د س ر المضلع س م ن ج ل



فإذا كان P ب = ٥، د س = ٦، س ر = ٣، ج د = ٤، س م = ٢، م ن = ٣، ن ج = ٤، ج ل = ٥

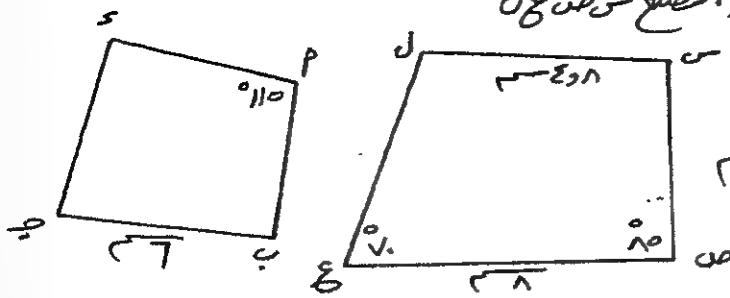
أوجد :- (١) معامل تشابه المضلع س م ن ج ل للمضلع P ب ج د س ر

(٢) س م = ٢، م ن = ٣، ن ج = ٤، ج ل = ٥

٣) مستطيل بعرض ١٠ سم، أطول محيط ومساحة مستطيل آخر مشابه له

إذا كان P - معامل التشابه = ٣، ب - معامل التشابه = ٤، د - معامل التشابه = ٥

٤ خ الشكل المقابل :- المضلع $PBJD$ من المضلع SD عمل



(د) أوجد SD (دسليم) ، طول PJ

(هـ) إذا كان محيط المضلع $PBJD = 19.0$ سم

أوجد محيط المضلع SD عمل .

٥ المضلع $PBJD$ من المضلع SD عمل فإذا كان $BP = 3$ سم ، $BD = 6$ سم ، $SD = 10$ سم

$SD = 1 - 3 = 8$ ، $SD = 1 + 3 = 4$. أوجد قيمة m الزاوية

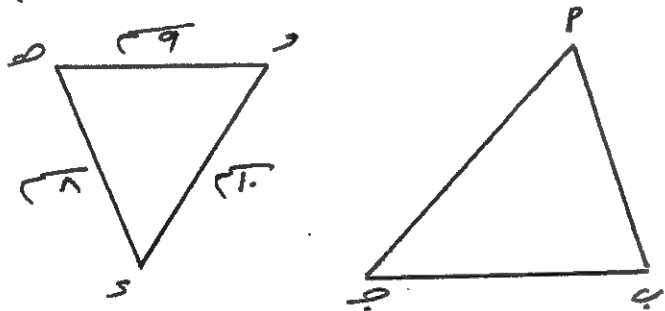
٦ مستطيلان متشابهان بعد الأول 8 سم ، 12 سم ، ومحيط الثاني 100 سم

طول المستطيل الثاني ومساحته .

٧ علبة على شكل مستطيل طوله 12 سم وعرضه 8 سم هل هذا المستطيل يقرب من

المستطيل الذهبي ؟ ولماذا ؟

٨ علبة على شكل مستطيل ذهب طوله 16 سم أوجد عرضه العلبة الأقرب سم .



٩ خ الشكل المقابل :-

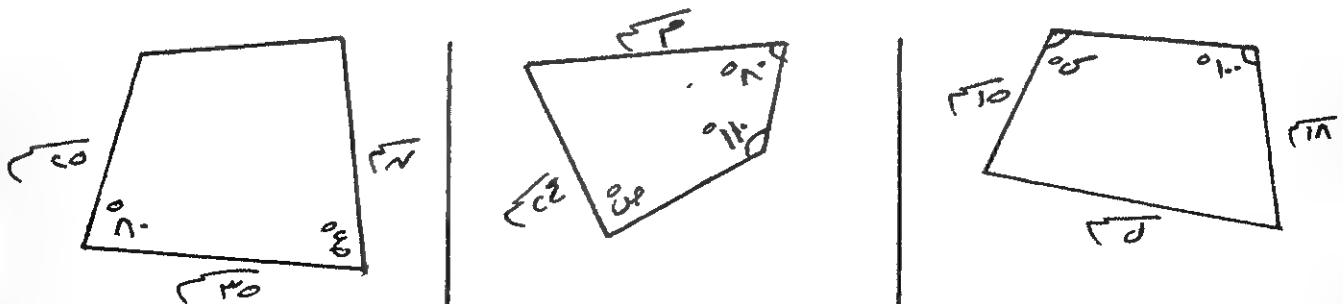
$PBJD$ من SD هو

$SD = 8$ سم ، $SD = 9$ سم ، $SD = 10$ سم

إذا كان محيط $PBJD = 11$ سم

أوجد أطوال أضلاع $PBJD$

١٠ المضلعان الثلاثي القابلية متشابهة . أوجد قيمة الرمز المستخدم في القياس .

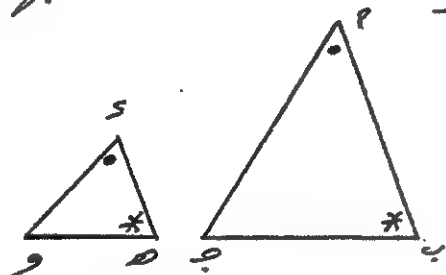


١٠ تشابه المثلثات

تعريف :- من الدرس السابق علمنا أنه لكي يتشابه مثلعاين يجب أن يتحقق شرطا تشابه
معا ولا يكفي تحقق أحدهما دون الآخر

أما في المثلثات فقد علمنا من الصف الثاني الإعدادي أنه لكي يتشابه مثلعاين
تحقق شرط واحد فقط من الشرطين السابقين ذكرهما.

مسئمة :- إذا طابقت زاويتاه في مثلث فطابقتا في مثلث آخر كانه المثلثان متشابهين



* من الشكل المقابل :- $\angle A \equiv \angle P$ و $\angle B \equiv \angle Q$ $\Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta PQR$

فإنه $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ و ينتج من التشابه أنه :-

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR}$$

مكتبة وسام

شريف شافع حسن مبارك - خلف الثانوية بنات
01004423597.3943035

* حالات خاصة *

① المثلثان المتساويان الأضلاع متشابهين .

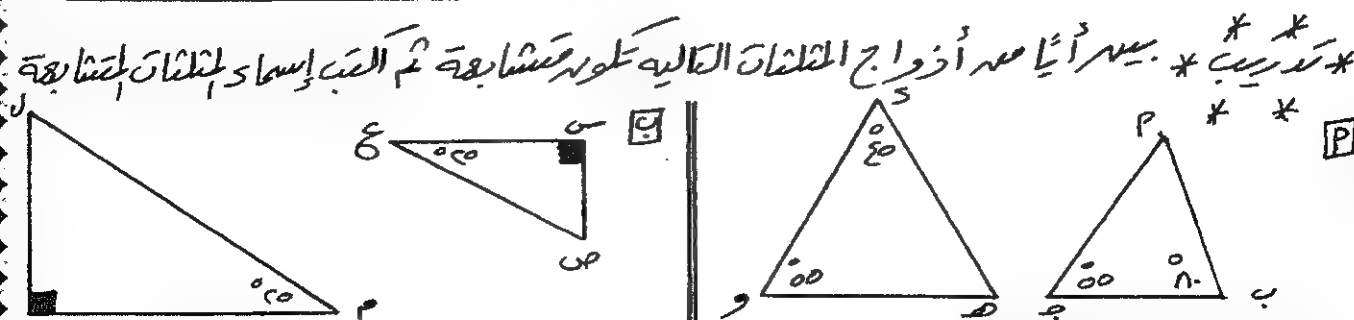
② يتشابه المثلثان القائم الزاوية إذا سادت قياس إحدى الزاويتين الحادتين

في أحدهما قياس إحدى الزاويتين الحادتين في الآخر .

③ يتشابه المثلثان المتساويان الساقين :-

* إذا سادى قياس إحدى زاويتي القاعدة في أحدهما قياس إحدى زاويتي القاعدة في الآخر

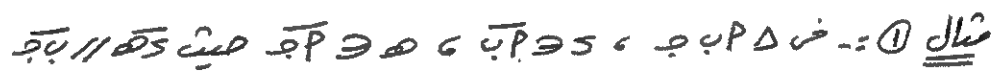
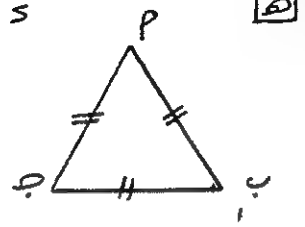
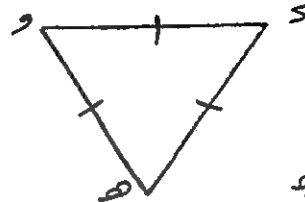
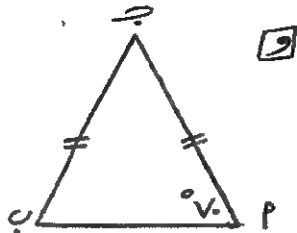
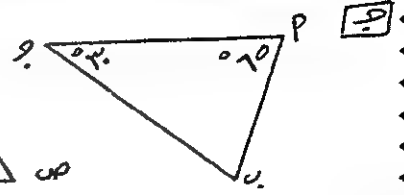
* إذا سادى قياس زاوية الرأس في أحدهما قياس زاوية الرأس في الآخر .



أ / جميل غالي السيد

(١٠٦)

الفصل الدراسي الأول



(c) اوسط طول کل صند \bar{x} ، ہج

الحليم :- :: كذا وكذا

$\therefore \rho(\hat{M}) = \rho(\hat{N})$, $\rho(\hat{M}) = \rho(\hat{N})$ "بالتناظر"

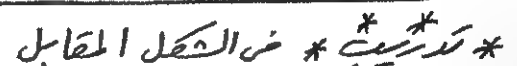
من $\Delta \Delta$ SP و P ج میوه
 $\left. \begin{array}{l} P > \equiv SP > \\ P > \equiv SP > \\ P > \equiv SP > \end{array} \right\}$

$\therefore \Delta SP \sim \Delta P \sim \Delta P$ وينتج عن التشابه :-

$$\frac{r}{\Sigma} = \frac{\Sigma DC}{\Sigma C} = \frac{SP}{LC + SP} \leftarrow \frac{\partial P}{\partial P} = \frac{\partial S}{\partial C} = \frac{SP}{CP}$$

$$\text{في } 0,7 = \frac{\Sigma X \Sigma DC}{r} = 0,9 \leftarrow$$

$$\sqrt{3,7} = 5P \Leftarrow 3,7 + \overbrace{5P}^P = 5P \Leftarrow (1,7 + \overbrace{5P}^P) = 5P \Leftarrow$$



اَجَبَةُ نَدْبِ نَدْبِ نَدْبِ نَدْبِ

نم اوهديقيہ سے العریہ



العلم :- ب. ب. ۱۱۵

خس ۵۵ P ب ج ۵۶ ه و ض ط

∴ PΔ و SPΔ و شقیق :-

* * *
* تدریب *
* * *
فصل النحل المقابل :-

* * انجیل و سائنس اور طبیعت

نم اوصیٰ رسول سہ



اثبت انه $SP \cap SX = \{s\}$

البصير :- العلم :- نرسع بآه و آف

عمر ۵۵ SP ۶ بڑھ گیا

∴ $p > q$ = q (دب) حقیقتاً به حشر کتابه من هو

$\therefore \psi = \psi_p = \psi_{(دهیج)}$ بالتقابل بالرأس

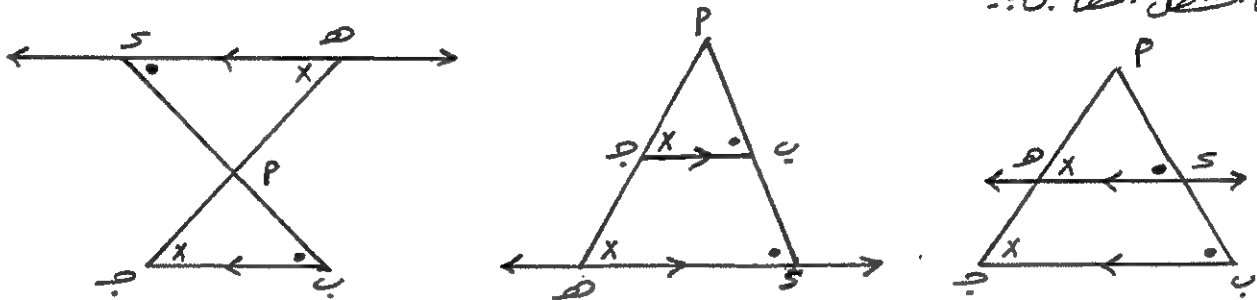
$\therefore \Delta SP \sim \Delta NPS$ و $\frac{PS}{SN} = \frac{SP}{PS} \therefore 6 = \frac{PS}{SN}$ $\therefore PS = 6SN$ \therefore مطلوب

$$\# \quad SP \times PS = (S) \Leftrightarrow \frac{SP}{S} = \frac{PS}{S} \quad \#$$

من نتائج هامة

⊗ نتيجة (١) :- إذا رسم مستقيم يوازي أحد أضلاع مثلث ويقطع الضلعين الآخرين أو المستقيمين الخارجين لهما خارج المثلث الناتج يشابه المثلث الأصلي.

من الشكل المقابل :-



إذا كان $SC \parallel AB$ ويقطع PA في S و PB في C فإن $SC \parallel AB$ على الترتيب

فإن $\triangle PSC \sim \triangle PAB$

مثال (٢) :- من الشكل المقابل :-

P ب ج مثلث ، S و C ب PA ، رسم $SC \parallel AB$

ويقطع PB في C ، $SC \parallel AB$ ويقطع AB في S و

برهن أن $\triangle PSC \sim \triangle PAB$

الحل :- $\therefore SC \parallel AB \quad \therefore \triangle PSC \sim \triangle PAB \quad \leftarrow (١)$

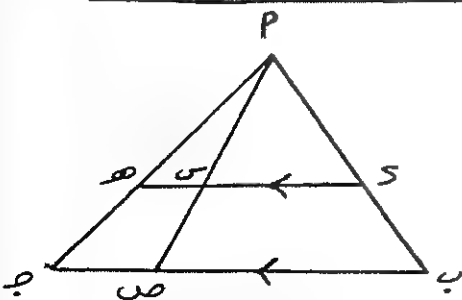
$\therefore SC \parallel AB \quad \therefore \triangle PSC \sim \triangle PAB \quad \leftarrow (٢)$

من (١) ، (٢) يتبع أن $\triangle PSC \sim \triangle PAB$ #

مثال (٣) من الشكل المقابل :-

(١) اذكر ثلاثة أزواج من المثلثات المتشابهة

$$(٢) \text{ أثبت أن } \frac{PS}{SA} = \frac{PC}{CB} = \frac{SC}{AB}$$



أ / جميل غالي السيد

$$① \leftarrow \frac{dp}{dp} = \frac{ds}{ds} = \frac{sp}{sp} \Rightarrow \text{supra normal}$$

© $\leftarrow \frac{SP}{\sum p} = \frac{\sum S}{\sum p} = \frac{SP}{p} \leftarrow \text{من } SP \text{ و } p \text{ معلوم است}$

$$\zeta \leftarrow \frac{\partial p}{\partial p} = \frac{\partial \zeta}{\partial \omega} = \frac{\partial p}{\partial \omega} \Leftarrow \partial \omega \text{ PD} \vee \partial \zeta \text{ PD} \therefore$$

6666T

$$\# \frac{ds}{db} = \frac{sh}{mh} = \frac{rs}{bs} \therefore$$

ضر الشكل المقابل :-

• فرض ۵۵ $P \subset P \cup Q$ و $P \cap Q$ صحیح است.

ب. $\angle P = \angle Q = 90^\circ$ ، $\angle B$ مشتركة

$I \leftarrow \text{DUP} \Delta \sim \text{PUS} \Delta \therefore$

• خضر PSD 6 بجو PSD 6 بجو فیصلہ :-

$$P(\hat{S}) = P(\hat{S} \cap \hat{B}) = P(\hat{S} \cap \hat{B} \cap \hat{A}) = P(\hat{S} \cap \hat{A}) = P(\hat{S} \cap \hat{A} \cap \hat{B}) = P(\hat{S} \cap \hat{A}) = P(\hat{S} \cap \hat{A}) = P(\hat{S} \cap \hat{A})$$

(II) $\leftarrow \phi \in \mathcal{P}(\Delta) \sim \phi \in \mathcal{P}(\Sigma) \therefore$

(I) G (II) $\therefore \Delta P \cup S \sim \Delta P \cap S \cup \Delta P \cap \bar{S} \leftarrow A$
 "علوٰیہ"

عنه النحل الساجد والعلامة ^{رحمته} عليه استغناج نظريات أكليريس :-

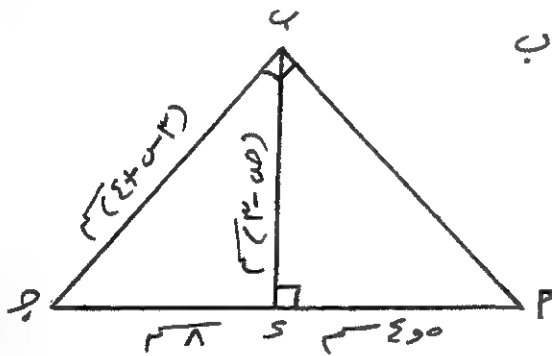
$$\frac{P_C}{P_U} = \frac{0.5}{0.9} \Leftarrow \text{PUP6 PUSDD Q.W.m } \textcircled{1}$$

اُی اُنہ P بن وسطے متناسب ہیں $\therefore (P) = 5 \times 6 = 30$

⑤ منه تشابه $\triangle P \triangle P \triangle P$ $\Leftarrow \frac{P}{P} = \frac{P}{P}$
 $\therefore (P) = P \times P$ أي أنه: P وسط متناسب بين P و P .

③ منه تشابه $\triangle P \triangle P \triangle P$ $\Leftarrow \frac{P}{P} = \frac{P}{P}$
 $\therefore (P) = P \times P$ أي أنه: P وسط متناسب بين P و P .

② منه تشابه $\triangle P \triangle P \triangle P$ $\Leftarrow \frac{P}{P} = \frac{P}{P}$
 $\therefore P \times P = P \times P$ ومنه $\frac{P \times P}{P} = P$



مثال ⑤: من الشكل المقابل: P وسط قائم ضرب

بني $\perp P$ ، $P = 50$ ، $8 = 2$ ، $8 = 2$

أوجد قيمة P

الحل: $\therefore \triangle P \triangle P \triangle P$ الزاوية ض ب

$\therefore P \perp P$

$\therefore \triangle P \triangle P \triangle P \sim \triangle P \triangle P \triangle P$ ونستخرج نظريات أقليدس

(٧) $\therefore (P) = P \times P \Leftarrow (2+50) = 50 \times 8 = 100$

$\therefore 2+50 = 100$

أو $2+50 = 100$

أو $2+50 = 100$

مفروضه $\frac{12}{P} = 5 \Leftarrow 12 = 5P$

$\frac{12}{P} = 5 \Leftarrow 12 = 5P$

(٧) $\therefore (P) = P \times P \Leftarrow (3-50) = 50 \times 8 = 36$

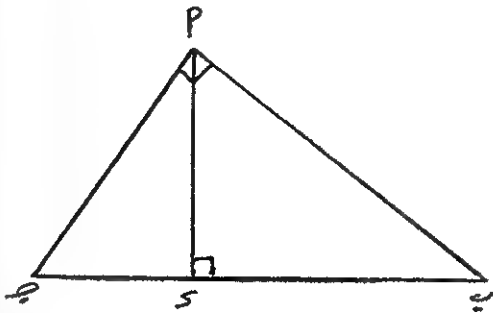
$\therefore 3-50 = 36$

أو $3-50 = 36$

أو $3-50 = 36$

مفروضه $\frac{3}{P} = 50$

$\frac{3}{P} = 50$



* * * * * خ الكحل المقابل :-

* * * * * P ب ج قائم الزاوية خ P ، P س \perp ب ج \therefore آلال :-

$$\frac{SP}{\dots} = \frac{BC}{BP} \quad (1)$$

$$\frac{SP}{\dots} = \frac{BC}{SP} \quad (2)$$

$$\frac{SP}{P \text{ ج}} = \frac{\dots}{BP} \quad (3)$$

$$\frac{SP}{\dots} = \frac{BP}{BP} \quad (4)$$

$$\dots \times \dots = (PS) \quad (5)$$

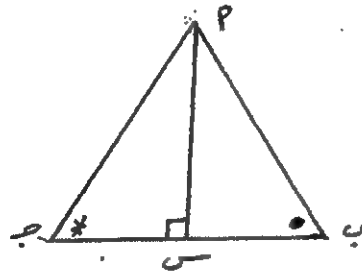
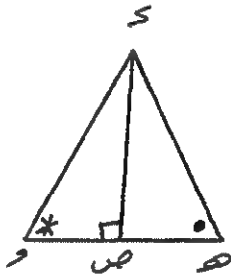
$$\frac{BP}{\dots} = \frac{\dots}{BP} \quad (6)$$

$$\frac{BP \times \dots}{BP} = SP \quad (7)$$

$$\dots \times \dots = (P \text{ ج}) \quad (8)$$

مثال (6) :- P ب ج ، S هو مثلثه متساوية الساقين . رسم P س \perp ب ج ليقطعه خ س

ورسم S ب ج \perp ه و ليقطعه خ س . أثبت أنه ب س = س ج و س ه = س و



الحل :- $\therefore P \text{ ب ج} \sim S \text{ ه و}$

$\therefore \angle (ب) = \angle (ه) \quad \angle (ج) = \angle (و) \quad \angle (س) = \angle (و)$

خ S ه و ، S ب ج

$\therefore \angle (ب) = \angle (ه) \quad \angle (ج) = \angle (و) \quad \angle (س) = \angle (و) \quad \therefore \angle (ب) = \angle (ج) \quad \therefore P \text{ ب ج} \sim S \text{ ه و}$

$\therefore P \text{ ب ج} \sim S \text{ ه و} \quad \therefore \frac{PS}{\dots} = \frac{BC}{BP} = \frac{BP}{S \text{ ه و}} \quad \therefore \frac{PS}{S \text{ ه و}} = \frac{BC}{BP} \quad (1)$

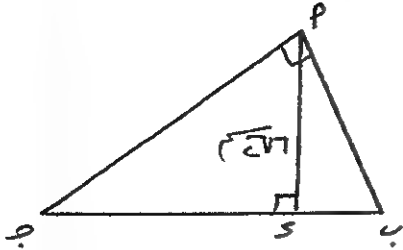
خ S ه و ، S ب ج

$\therefore \angle (ب) = \angle (ه) \quad \angle (ج) = \angle (و) \quad \angle (س) = \angle (و) \quad \therefore \angle (ب) = \angle (ج) \quad \therefore P \text{ ب ج} \sim S \text{ ه و}$

$\therefore P \text{ ب ج} \sim S \text{ ه و} \quad \therefore \frac{PS}{S \text{ ه و}} = \frac{BC}{BP} = \frac{BP}{S \text{ ه و}} \quad \therefore \frac{PS}{S \text{ ه و}} = \frac{BC}{BP} \quad (2)$

مثال (7) :- P ب ج مثلث قائم الزاوية خ P ، رسم P س \perp ب ج ليقطعه خ س

إذا كان $\frac{SP}{S \text{ ب}} = \frac{1}{2}$ ، $SP = 2$ ، سم أو جد طول كل من س ج ، P ب ، آ ب



الطلب :- $\therefore \frac{PS}{AB} = \frac{1}{2} \Leftarrow PS = 27 \text{ cm}$

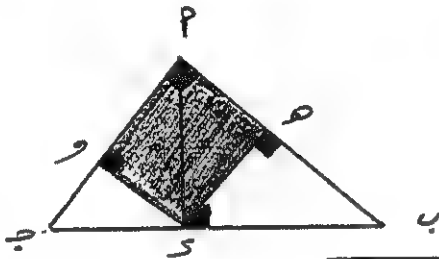
\therefore $\triangle PAB$ قائم في P $\therefore PS \perp AB$

$\therefore (PS)^2 = (AB)^2 - (PB)^2$

$\Leftarrow 27^2 = 100 - PB^2 \Leftarrow PB^2 = 100 - 729 = 271$

$\therefore PB = \sqrt{271} \text{ cm}$

$\therefore (PB)^2 = (AB)^2 - (PS)^2 \Leftarrow 271 = 100 - PS^2 \Leftarrow PS^2 = 100 - 271 = -171$



مثال ١ :- في الشكل المقابل :- $\triangle PAB$ قائم في P

$PS \perp AB$ ، $PS \perp BC$ ، $PS \perp AC$

اثبت أنه (١) $\triangle PAB \sim \triangle PBC$

(٢) مساحة المثلث $PAB = \frac{1}{2} \times AB \times PS$

الطلب :- \therefore $\triangle PAB \sim \triangle PBC$ ، $\therefore \frac{PS}{AB} = \frac{PS}{BC}$

$\therefore PS^2 = (AB)^2 - (PB)^2$ ، $\therefore PS^2 = (BC)^2 - (PB)^2$

$\therefore \triangle PAB \sim \triangle PBC$ (I) #

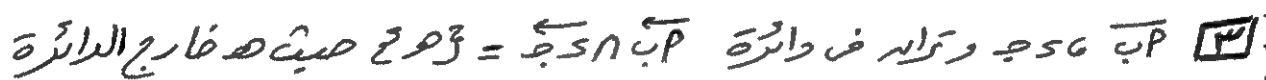
$\therefore (PS)^2 = (AB)^2 - (PB)^2$ ، $\therefore PS^2 = (BC)^2 - (PB)^2$

$\therefore (PS)^2 = (AB)^2 - (PB)^2$ ، $\therefore PS^2 = (BC)^2 - (PB)^2$

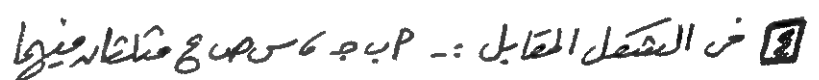
\therefore مساحة المثلث $PAB = \frac{1}{2} \times AB \times PS$ ، \therefore مساحة المثلث $PBC = \frac{1}{2} \times BC \times PS$

\therefore مساحة المثلث $PAB = \frac{1}{2} \times AB \times PS$ ، \therefore مساحة المثلث $PBC = \frac{1}{2} \times BC \times PS$ (II) #

❖ اذكر الحالات التي يكون فيها المثلثان متشابهين وفي حالة التشابه اذكر سبب التشابه



نعم اوصد طول جده

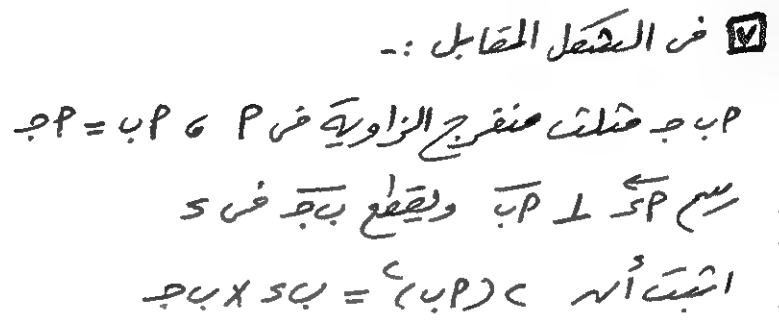
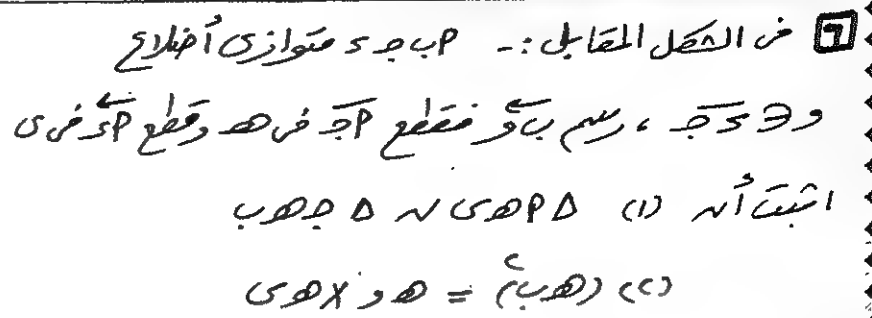


$$\sqrt{1} = 1, \sqrt{4} = 2, \sqrt{9} = 3, \sqrt{16} = 4$$

مجموع = ۳۶ سم. اثبت ان $\Delta PQR \sim \Delta STU$ صحیح تم او صحیح طول پر

□ فرض $p \Delta q$: $p < q$, $p \supset q$ صحیح و $(p \wedge q) = (q \wedge p)$ (ح)

$$P \times P = (P)$$

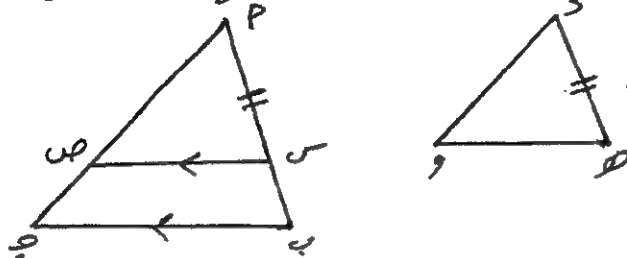


(A) أراد سليمان أنه يعرف ارتفاع سارية العلم الذي في مدرسته فوضع صراره على بعد
 ٥ أمتار منه فأمسك السارية ثم تحرك إلى الخلف مسافة ١ متر وكانت عيناه
 على ارتفاع ٥ دامت فوق سطح الذراع فجاءا كانت قدماه والمرآة والسارية
 على استقامة واحدة أوجد ارتفاع السارية
 "علما بأنه زاوية القوط = زاوية الانعكاس"

٣) "تابع / تشابه المثلثات"

نظرية (١) :-

إذا تناسب أطوال الأضلاع المتناظرة من مثلثين فإنهما يشابهان.



المعطيات :- $\Delta PQR \sim \Delta STU$ ونريد

$$\frac{PQ}{ST} = \frac{QR}{TU} = \frac{PR}{SU}$$

المطلوب :- $\Delta PQR \sim \Delta STU$

الحل :- نحسب ΔPQR ، $PQ = ST$ ، $QR = TU$ ، $PR = SU$ ونقطع PQ من Q

البرهان :- $\therefore \Delta PQR \sim \Delta STU$ $\therefore \Delta PQR \sim \Delta STU$

ويكون $\frac{PQ}{ST} = \frac{QR}{TU} = \frac{PR}{SU}$ $\therefore PQ = ST$ ، $QR = TU$ ، $PR = SU$

$\therefore \frac{PQ}{ST} = \frac{QR}{TU} = \frac{PR}{SU}$ ① $\therefore \frac{PQ}{ST} = \frac{QR}{TU} = \frac{PR}{SU}$ معطى ②

من ① ، ② $\Rightarrow PQ = ST$ ، $QR = TU$ ، $PR = SU$

"الأضلاع الثلاثة متطابقة"

"المثلثان المتطابقان يكونان متشابهين"

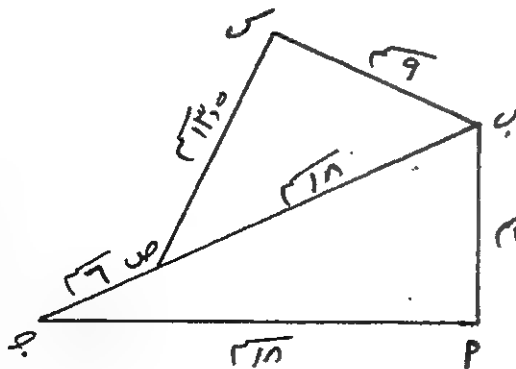
"برهاناً"

$\therefore \Delta PQR \sim \Delta STU$

$\therefore \Delta PQR \sim \Delta STU$

$\therefore \Delta PQR \sim \Delta STU$

$\therefore \Delta PQR \sim \Delta STU$ #



مثال ① :- في الشكل المقابل :-

ب، د، هـ على استقامة واحدة

أثبت أنه : (١) $\Delta PQR \sim \Delta STU$ (٢) $\Delta PQR \sim \Delta STU$

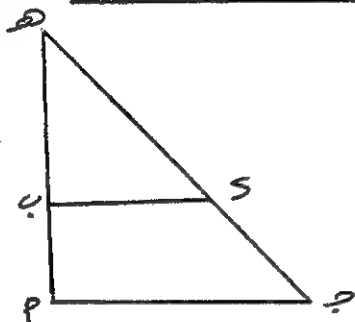
(٣) $\Delta PQR \sim \Delta STU$

الحل :- في ΔPQR ، $PQ = 6$ ، $QR = 12$ ، $PR = 15$

$$\frac{2}{3} = \frac{17}{1350} = \frac{P}{S} \quad \frac{2}{3} = \frac{7+17}{18} = \frac{P}{S} \quad \frac{2}{3} = \frac{14}{9} = \frac{P}{S}$$

$$\therefore \frac{P}{S} = \frac{P}{S} = \frac{P}{S} \quad (\text{النسبة المتساوية متناسبة})$$

$\therefore \Delta P \sim \Delta S$ $\#$ وتبين من التشابه أن الزوايا المتناظرة متساوية
 $\#$ $\text{م (P)} = \text{م (S)}$ أي أن P ينصف S



مثال ٥ :- في الشكل المقابل :- $P \sim S$ $\#$ $\text{م (P)} = \text{م (S)}$

$$\text{حيث } \frac{P}{S} = \frac{P}{S} \quad \frac{P}{S} = \frac{P}{S}$$

$$\text{أثبت أن } P \parallel S$$

$$\text{الحل :- } \therefore \frac{P}{S} = \frac{P}{S} \Rightarrow \frac{P}{S} = \frac{P}{S}$$

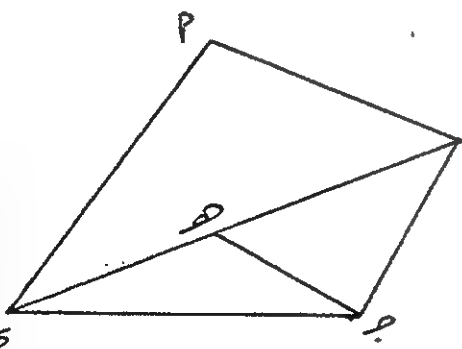
"مزايا التناسب"

$$\therefore \frac{P}{S} = \frac{P}{S} \Rightarrow \frac{P}{S} = \frac{P}{S}$$

$$\text{م (P)} = \text{م (S)} = \frac{P}{S} \quad \text{أثبت أن } P \parallel S$$

أي أن $P \sim S$ $\#$ $\text{م (P)} = \text{م (S)}$ وتبين أن

$\#$ $P \parallel S$ $\#$ $\text{م (P)} = \text{م (S)}$ وتبين أن



مثال ٦ :- في الشكل المقابل :- $P \sim S$ $\#$ $\text{م (P)} = \text{م (S)}$

$$\text{حيث } \frac{P}{S} = \frac{P}{S} \quad \frac{P}{S} = \frac{P}{S}$$

أثبت أن :- (1) $P \parallel S$ (2) $P \parallel S$

$$\text{الحل :- } \therefore \frac{P}{S} = \frac{P}{S} \Rightarrow \frac{P}{S} = \frac{P}{S}$$

$$\therefore \frac{P}{S} = \frac{P}{S} \Rightarrow \frac{P}{S} = \frac{P}{S}$$

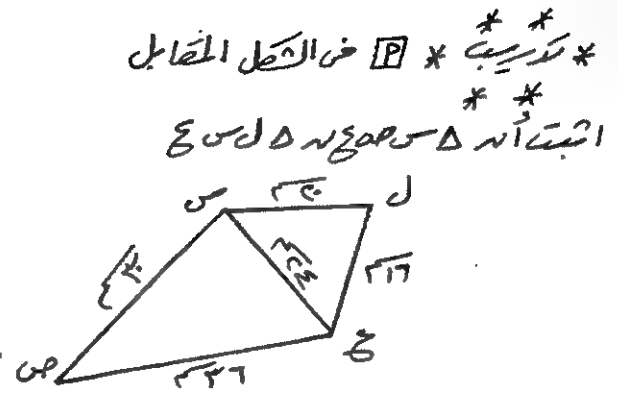
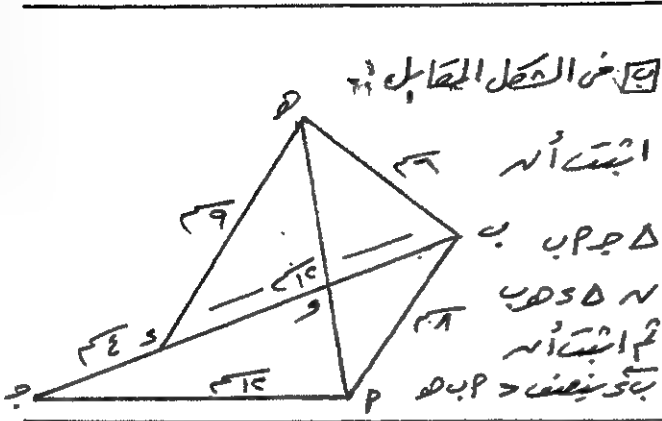
$$\text{م (P)} = \text{م (S)} = \frac{P}{S} \Rightarrow \frac{P}{S} = \frac{P}{S}$$

$SP \parallel AB$::

ونضع أنه $SP = (PQ)$ وهما من وضع متساوي

$BP \parallel AC$::

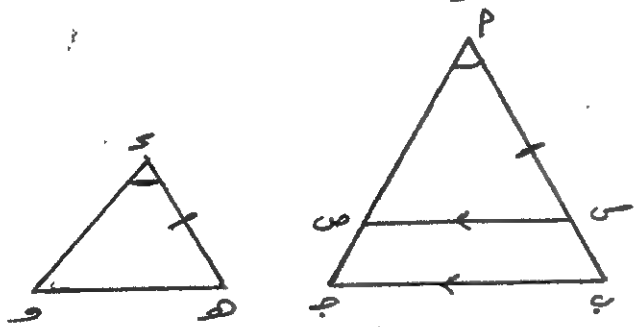
، $BP = (PS)$ وهما من وضع متساوي



نظرية (٢) :-

إذا طابقت زاوية من مثلث زاوية من مثلث آخر وتنا سبت أطوال الأضلاع

التي تحتوي صائها الزاويتان كان المثلثان متشابهين.



البيانات :- $\angle A = \angle D$ ، $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$

المطلوب :- $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

الحل :- خذ من AB من P حيث $AP = AC$

ورسم من P إلى BC وقطع AP من BC

البرهان :- $\Delta ABC \sim \Delta APC$:: $\Delta APC \sim \Delta DEF$:: $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ (١)

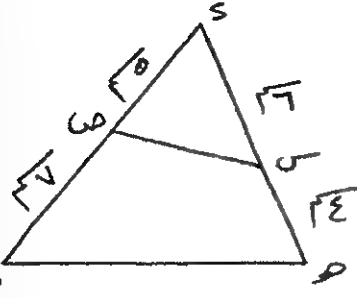
وبكونه $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ ، $\frac{AP}{DE} = \frac{AC}{DF}$ (مطلوب) ، $\Delta APC \sim \Delta DEF$::

$\frac{AP}{DE} = \frac{AC}{DF}$ وبكونه $AP = AC$ ، $\Delta APC \sim \Delta DEF$::

$\Delta APC \sim \Delta DEF$:: "ضلعاه وزاوية محصورة"

$\Delta APC \sim \Delta DEF$:: $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ (٢)

منه (١) ، (٢) يتبع أنه $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ #



مثال ③ :- من الشكل المقابل :- ده وحملت فيه

$$دو = ٢٠م ، دى = ١٠م ، ده = ١٨م$$

$$س هـ = ٤م ، هـ د = ٧م ، اوجد :-$$

(١) طول س هـ ، (٢) أثبت انه لخط سن هو من راعى واثرى .

الحل :- $د هـ = ١٢ - ٧ = ٥م$ ، $د س = ١٠ - ٤ = ٦م$

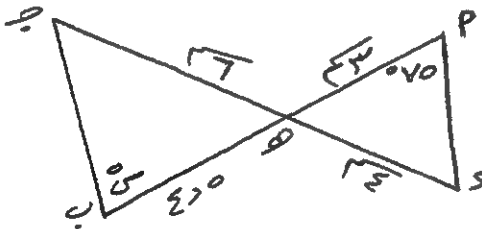
من $\Delta د هـ د$ و $\Delta د س د$ فيكون :- $\frac{د س}{د هـ} = \frac{٦}{٥} = \frac{١٠}{٥} = ٢$ ، $\frac{١}{٢} = \frac{٥}{١٠} = \frac{د هـ}{د س}$

:- $\frac{د س}{د هـ} = \frac{١٠}{٥} = ٢$ ، $\frac{١}{٢} = \frac{٥}{١٠} = \frac{د هـ}{د س}$:- $\Delta د هـ د \sim \Delta د س د$

:- $\frac{د س}{د هـ} = \frac{١٠}{٥} = ٢$ ، $\frac{١}{٢} = \frac{٥}{١٠} = \frac{د هـ}{د س}$ ، $\frac{١}{٢} = \frac{٥}{١٠} = \frac{د هـ}{د س}$

ونستنتج أيضا من التشابه انه $\angle د هـ س = \angle د س هـ$ (زوايا متبادلة)

:- $\Delta د س هـ$ زاوية خارجية للشكل الرباعي س هـ د هـ :- الشكل سن هو من راعى واثرى



مثال ④ :- من الشكل المقابل :-

أوجد قيمة الرمز المستخدم من إيمان مفسرا واجابته

الحل :-

لايجاد الرمز سن يجب اثبات انه $PA \parallel SB$ وذلك من تشابه المثلثين ΔPAB و ΔSBA

من ΔPAB و ΔSBA فيكون :- $\angle PAB = \angle SBA$ و $\angle PBA = \angle SBA$

:- $\frac{PA}{SB} = \frac{AB}{BA} = \frac{PB}{SA}$ ، $\frac{١٠}{١٢} = \frac{١٢}{١٠} = \frac{١٤}{١٤}$

:- $\Delta PAB \sim \Delta SBA$ و $\Delta PAB \sim \Delta SBA$ ونستنتج من التشابه انه :-

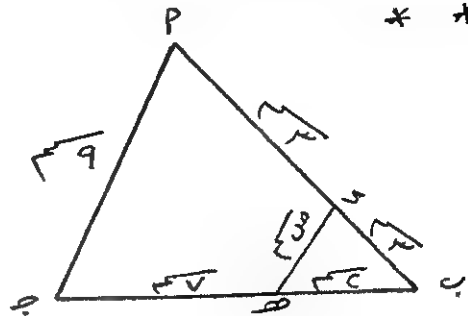
$\angle PAB = \angle SBA$ و $\angle PBA = \angle SBA$ ، $\angle PAB = \angle SBA$

مكتبة

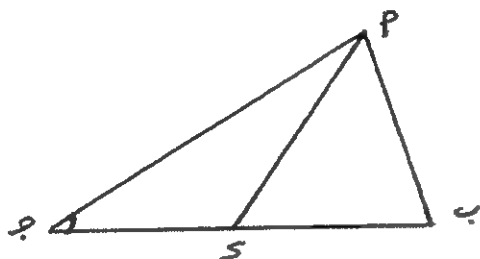
شرف - شارع حسني مبارك - خلف الثانوية بنات

01004423597.3943035

الصف الأول الثانوي



د. ج. شركة (1)



$$(c) \frac{S_P}{P_P} = \frac{P_P}{P_P} \Leftrightarrow P_P \times S_P = P_P \times P_P \Leftrightarrow P_P \times S_P = (P_P)^2 \therefore$$

POCANSPAN نيوٽن ۽ گرو

$$\psi_S \chi_U P = \psi_S \chi_U P(c)$$

أثبت أنه (1) $\Delta P \leq N \Delta S$

الطه :- :: $\Delta P \propto \Delta S$ و

$$\textcircled{1} \leftarrow \frac{dp}{ds} = \frac{p_c}{p_h} = \frac{p_p}{p_s} \quad \therefore (dp)_p = (dp)_s \therefore$$

∴ سائنس کا بڑا کام ہی مفید ہو

② $\leftarrow \frac{0.0}{0.0} = \frac{0.0}{0.0} \therefore$

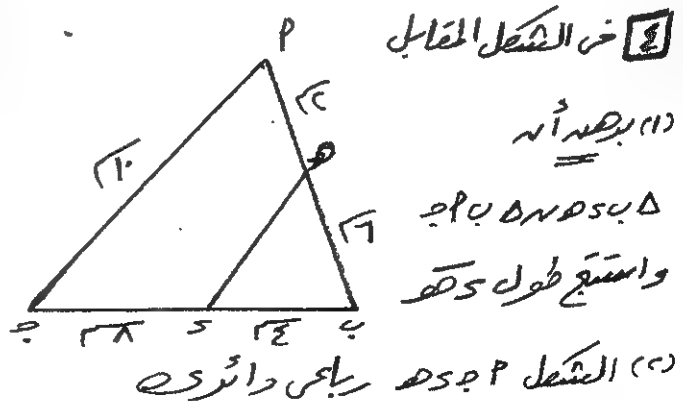
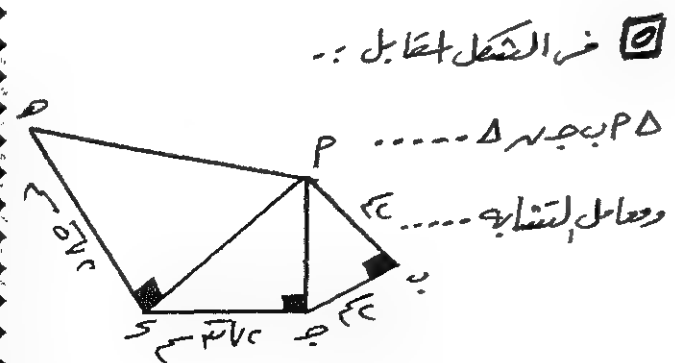
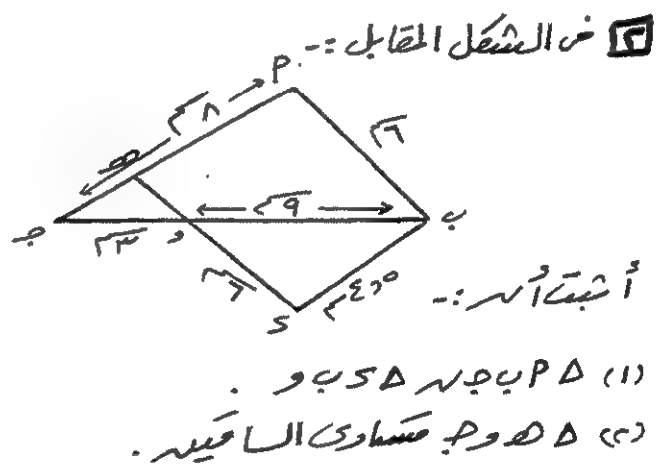
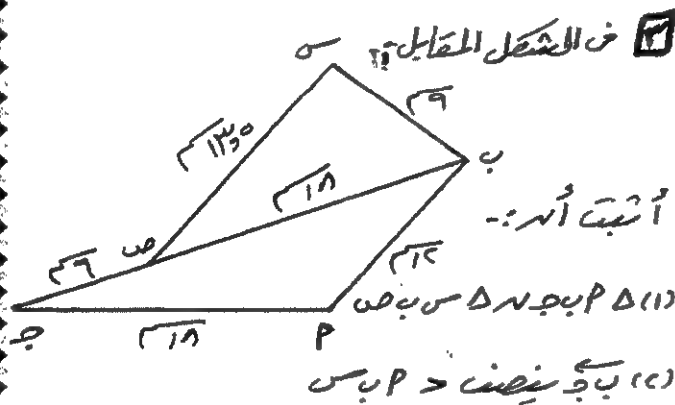
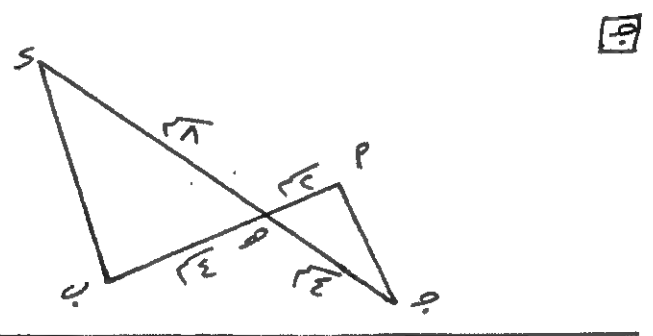
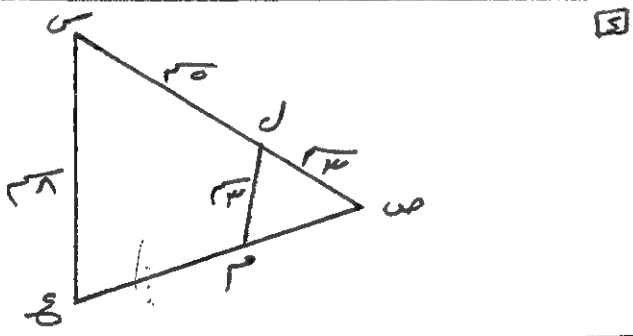
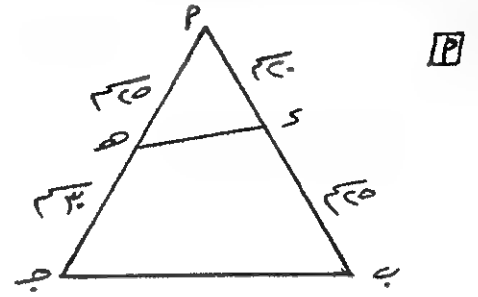
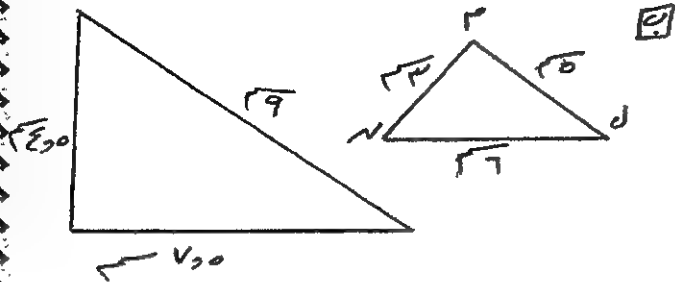
خا ΔΔ P بس 6 دھس فیروز: > ب ≡ دھ 6 $\frac{P}{S} = \frac{B}{S}$ (برہان نمبر ۱) ۷

∴ $\Delta OPQ \sim \Delta RST$ وينتج من التشابه أن $\frac{OP}{OR} = \frac{OQ}{OS} = \frac{PQ}{RS}$ (1)

$\boxed{\psi_S \times \psi_P = \psi_S \times \psi_P} \Leftarrow \frac{\psi_P}{\psi_S} = \frac{\psi_P}{\psi_S} \Leftarrow \psi \in \mathbb{C}^1 \text{ No}$

تمادي على "تابع/تشابه الثلاثيات"

1 اذكر أي الحالات يكون فيها المثلثان متشابهين وفي حالة التشابه اذكر سبب التشابه



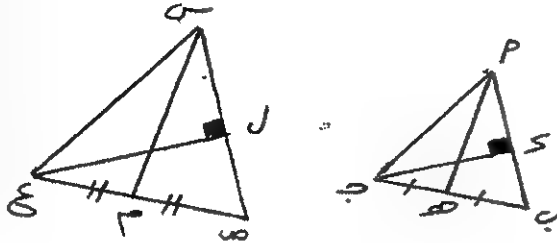
٦) P بج S شكل راي مرسوم داخل دائرة تقاطع قطره PQ ، بج S فره

فإذا كان $\frac{PS}{SP} = \frac{PQ}{SQ}$ أثبت أنه (١) $\Delta PDS \sim \Delta SQS$ ، (٢) بج ينصف PQ و

٧) في الشكل المقابل :- P بج S مرسوع

هـ منصف بج ، م منصف مرسوع ،

بج $\perp PQ$ ، Q ل S هـ أثبت أنه



(١) $\Delta PDS \sim \Delta SQS$ ، (٢) $\frac{PS}{SP} = \frac{PQ}{SQ}$

٨) P بج ، م مرسوع مثلث متساوي الساقين حيث $PQ < PQ$ ، م مرسوع م

هـ ل منصف بج ، مرسوع على الترتيب . رسم $PQ \perp PQ$ ، م مرسوع

أثبت أنه $\Delta PDS \sim \Delta SQS$.

٩) P بج مثلث ، $S \in PQ$ حيث $(SP) = SQ$ ، بج $PS = SQ$ ، بج $PS = SQ$

أثبت أنه :- (١) $\Delta PDS \sim \Delta SQS$

(٢) $PS \perp PQ$ ، (٣) $\angle P = 90^\circ$

(٤) $PS \perp PQ$

درس "العلاقة بين مساحة سطح مثلثين متشابهين"

أولاً: النسبة بين مساحة سطح مثلثين متشابهين :-

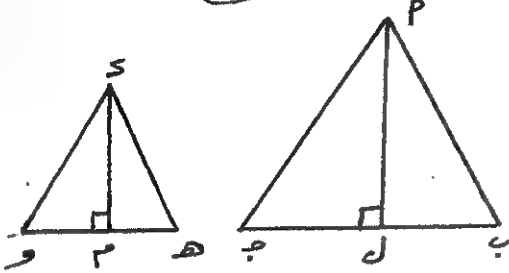
نظرية (٣) :-

النسبة بين مساحة سطح مثلثين متشابهين تساوي مربع النسبة

بين طول أي ضلعين متناظرين فيها .

في الشكل المقابل :- إذا كان $\triangle PAB \sim \triangle SDH$ و

$$\text{فإن } \left(\frac{PA}{SD}\right)^2 = \left(\frac{PB}{DH}\right)^2 = \left(\frac{AB}{SH}\right)^2 = \frac{(\triangle PAB)}{(\triangle SDH)}$$



ملاحظة هامة

① النسبة بين مساحة سطح مثلثين متشابهين تساوي مربع النسبة بين ارتفاعي متناظرين فيها

$$\text{في الشكل السابق :- } \left(\frac{PL}{SM}\right)^2 = \frac{(\triangle PAB)}{(\triangle SDH)}$$

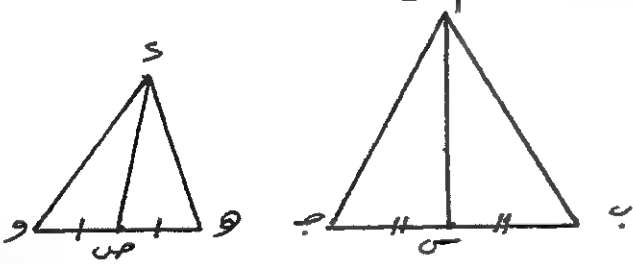
② النسبة بين محيطي مثلثين (متشابهين) متساوي النسبة بين طول أي ضلعين

$$\text{متناظرين فيها . في الشكل السابق :- } \frac{\text{محيط } \triangle PAB}{\text{محيط } \triangle SDH} = \frac{PA}{SD} = \frac{PB}{DH} = \frac{AB}{SH}$$

③ النسبة بين مساحة سطح مثلثين متشابهين تساوي مربع النسبة بين طول أي متوسطين متناظرين فيها .

في الشكل المقابل :- $\triangle PAB \sim \triangle SDH$ و

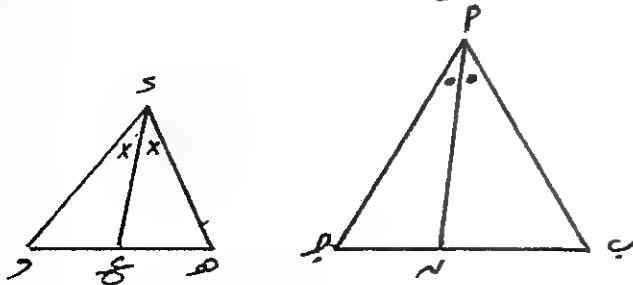
$$\therefore \left(\frac{PO}{SQ}\right)^2 = \frac{(\triangle PAB)}{(\triangle SDH)}$$



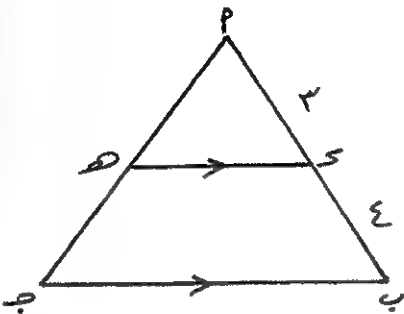
④ النسبة بين مساحة سطح مثلثين متشابهين تساوي مربع النسبة بين طول أي منصفين لزاويتي متناظرين فيها

في الشكل المقابل :- $\triangle PAB \sim \triangle SDH$ و

$$\therefore \left(\frac{NP}{TQ}\right)^2 = \frac{(\triangle PAB)}{(\triangle SDH)}$$



القاعدة تساوي النسبة بين ارتفاعيها .
 ⑤ النسبة بين مساحتي مثلثين لهما نفس الارتفاع تساوي النسبة بين طولي قاعدتيهما .



مثال ① :- من الشكل المقابل :- PAB مثلث DE بـ $ج$

حيث $\frac{PD}{PA} = \frac{3}{7}$ $DE \parallel AB$ وقطع PJ من H

إذا كانت مساحة $PDE = 9$ سم² أوجد :-

(1) مساحة PDE (2) مساحة شبه المثلث DEB

الحل :- $DE \parallel AB \therefore \triangle PDE \sim \triangle PAB$

$$\frac{9}{49} = \left(\frac{3}{7}\right)^2 = \frac{(PDE)}{(PAB)} \Leftrightarrow \left(\frac{PD}{PA}\right)^2 = \frac{(PDE)}{(PAB)} \therefore$$

$$\Leftrightarrow (PDE) = \frac{9 \times 49}{9} = 49 \text{ سم}^2$$

$$\therefore (شبه المثلث DEB) = (PAB) - (PDE) = 49 - 9 = 40 \text{ سم}^2$$

$$\therefore (شبه المثلث DEB) = 40 - 9 = 31 \text{ سم}^2$$

* * * تدريب * PAB مثلث مساحته 60 سم² ، رسم من $ج$ AB وقطع PJ من $س$
 * * * وقطع PJ من $ف$ فإذا كان $P : س : ب = 3 : 2 : 1$ أوجد مساحته الشكل $س ب ج$

مثال ⑤ :- إذا كانت النسبة بين مساحتي مثلثين متشابهين هي 9 : 4 فإذا كان

محيط المثلث الأكبر 90 سم أوجد محيط المثلث الأصغر

الحل :- لفرصه $\triangle PDE \sim \triangle PAB$

$$\therefore \frac{9}{4} = \left(\frac{PD}{PA}\right)^2 = \frac{(PDE)}{(PAB)} \Leftrightarrow \frac{9}{4} = \frac{(PDE)}{49}$$

$$\therefore \frac{9}{4} = \frac{(PDE)}{49} \Leftrightarrow \frac{9}{4} = \frac{PD}{PA} = \frac{\text{محيط } PDE}{\text{محيط } PAB}$$

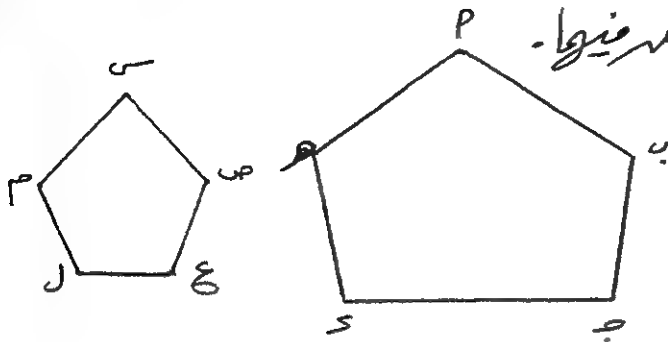
$$\therefore \text{محيط } PDE = \frac{9 \times 90}{4} = 202.5$$

الصف الأول الثانوي

* * * * * إذا كانت النجبة بغير مساهمة متلثية متساوية هي $\frac{9}{17}$ فإذا كانه محيط المثلث الأصغر 60 سم أو محيط المثلث الأكبر.

نظرية (٤) :- النسبة بين مساحة سطح مضلعين متشابهين تساوي مربع النسبة

بين طولي ضلعين متناظرين فيها .



من الشكل المقابل :-

$$\frac{م}{س} = \frac{المضلع ب د س هـ}{المضلع س م ج ل ع} = \left(\frac{ب د}{س م}\right) = \left(\frac{س م}{م ج}\right) = \left(\frac{ج ل}{ل ع}\right) = \left(\frac{هـ س}{س ع}\right) = \left(\frac{س ع}{ع ل}\right)$$

مثال (٥) :- مضلعان متشابهان النسبة بين طولي ضلعين متناظرين فيها ٣ : ١

فإذا كان مجموع مساحتهما ٥٠ سم^٢ أوجد مساحة كل منهما .

الحل :-

∵ النسبة بين طولي ضلعين متناظرين = ٣ : ١ ∴ النسبة بين مساحتهما = ٩ : ١

لنفرض مساحة الأول = ٩ س سم^٢ ومساحة الثاني = ١ س سم^٢

∴ مجموع مساحتهما = ٥٠ سم^٢ ⇒ ٩ س + ١ س = ٥٠ ⇒ ١٠ س = ٥٠ ⇒ س = ٥

∴ مساحة المضلع الأول = ٥ × ٩ = ٤٥ سم^٢ ، مساحة المضلع الثاني = ٥ × ١ = ٥ سم^٢ #

* * * * *
مضلعان متشابهان النسبة بين طولي ضلعين متناظرين فيها ٣ : ٢
فإذا كان الفرق بين مساحتهما ٣٢ سم^٢ أوجد مساحة كل منهما .

مثال (٦) :- المضلع ب د س هـ ل متشابه للمضلع م ن هـ (م) ∴ ٤٠ = س م ، س د = ٣٠

ج د = ٦٠ سم ، أوجد (١) م ن (ش) ، (٢) طول ع ل

(٣) (المضلع ب د س هـ ل) : (المضلع م ن هـ ل)

الحل :- ∴ المضلع ب د س هـ ل ∼ المضلع م ن هـ ل ∴ م ن = (ش) = ٤٠ = ع ل #

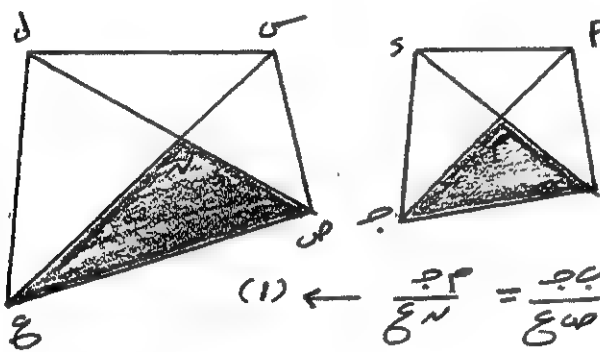
∴ س ص = $\frac{3}{4} P$ ∴ $\frac{3}{4} = \frac{OP}{S ص}$ "عده خواص القياس"

عده تشابه المضلعين نجد أن ∴ $\frac{5}{8} = \frac{OP}{S ص} \Leftarrow \frac{5}{8} = \frac{3}{4}$

∴ $8 \times 3 = \frac{16 \times 3}{2} = 24$ #

∴ م (المضلع P ب ج د) : م (المضلع س ص ح ل) = (P ب) : (س ص) = 9 : 16 #

مثال ٥ ∴ P ب ج د ، س ص ح ل مضلعان متشابهان ، تقاطع قطري الأول من م وتقاطع قطري الثاني من ن اشبه أن م (المضلع P ب ج د) : م (المضلع س ص ح ل) = (م ج) : (ن ح) ∴



الحل ∴ ∴ المضلع P ب ج د ∼ المضلع س ص ح ل

∴ ∴ P ب ج د ∼ س ص ح ل

∴ ∴ S ب ج د ∼ S ص ح ل (لماذا؟)

∴ ∴ م ب ج د ∼ م ن ح ل ∴ ونجيب أن : $\frac{م ج}{م ن} = \frac{م ج}{م ح} \Leftarrow (1)$

∴ المضلع P ب ج د ∼ المضلع س ص ح ل

∴ ∴ $\frac{م (المضلع P ب ج د)}{م (المضلع س ص ح ل)} = \frac{م ب ج}{م ح ل} \Leftarrow (2)$

عده (1) و (2) ∴ م (المضلع P ب ج د) : م (المضلع س ص ح ل) = (م ج) : (ن ح) ∴

مثال ٧ ∴ P ب ج ح حلت قائم الزاوية من ب فإذا كان P ب ج ج د ، P ج د أ ضلع

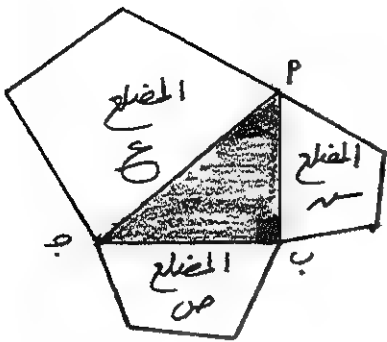
مناظرة لثلاث مضلعات متشابهة منشأة على أضلاع التلث P ب ج

وهي على الترتيب : المضلع س ، المضلع ص ، المضلع ع .

اشبه أن م (المضلع س) + م (المضلع ص) = مساحة (المضلع ع)

الحل ∴ ∴ المضلع س ∼ المضلع ص ∼ المضلع ع ∴ $\frac{م (المضلع س)}{م (المضلع ع)} = \frac{م (ب ج)}{م (ج د)} \Leftarrow (1)$

∴ المضلع ص ∼ المضلع ع ∴ $\frac{م (المضلع ص)}{م (المضلع ع)} = \frac{م (ج د)}{م (د ح)} \Leftarrow (2)$



مجموع (1) و (2)

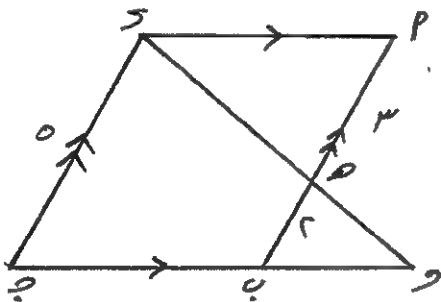
$$\frac{c(P)}{c(B)} + \frac{c(P)}{c(S)} = \frac{c(\text{المضلع د})}{c(\text{المضلع ع})} + \frac{c(\text{المضلع س})}{c(\text{المضلع ح})} \leftarrow$$

$$(1) \leftarrow \frac{c(P) + c(P)}{c(B)} = \frac{c(\text{المضلع د}) + c(\text{المضلع س})}{c(\text{المضلع ع})} \therefore$$

$$\therefore P \text{ د ب ج قائم } \leftarrow c(P) = c(B) + c(S) \leftarrow (2)$$

$$1 = \frac{c(P)}{c(B)} = \frac{c(\text{المضلع د}) + c(\text{المضلع س})}{c(\text{المضلع ع})} \leftarrow (1) \text{ و } (2)$$

$$\therefore c(\text{المضلع س}) + c(\text{المضلع د}) = c(\text{المضلع ع}) \quad \#$$



"معه ضوا من المتوازي"

"بالقبادل"

مثال ① :- في الشكل المقابل :- ب د و متوازي أضلاع

$$\text{هو } P \text{ ب حيث } \frac{P}{B} = \frac{3}{5} \text{ و } \frac{S}{W} = \frac{4}{6} \text{ و } \frac{S}{P} = \frac{3}{4}$$

(1) أثبت أنه $\Delta S د و \sim \Delta س پ و$

$$(2) \text{ أوجد } \frac{c(S د و)}{c(S پ و)}$$

الحل :-

$$\frac{P}{B} = \frac{3}{5} \text{ و } \frac{S}{W} = \frac{4}{6}$$

$$\therefore \Delta س د و \sim \Delta س پ و \text{ فيروا } \left[\frac{P}{B} = \frac{S}{W} = \frac{3}{5} \text{ و } \frac{S}{P} = \frac{4}{6} \right]$$

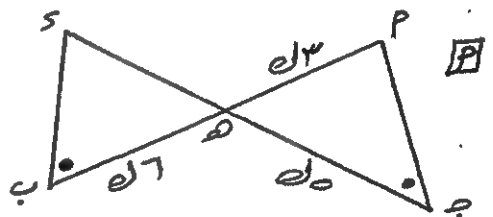
$$\therefore \Delta س د و \sim \Delta س پ و \quad \#$$

$$\therefore \frac{c(S د و)}{c(S پ و)} = \left(\frac{P}{B} \right)^2 = \left(\frac{3}{5} \right)^2 = \frac{9}{25} \quad \#$$

۴۰ امل ما یاتی :-

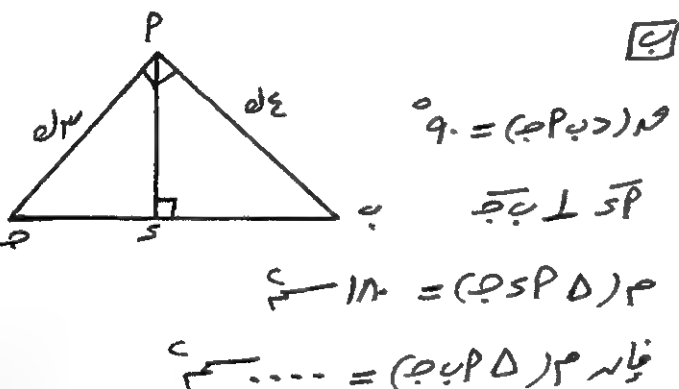
(٤) إذا كانت $\Delta \sim \text{D.P.D}$ و $\mu = (\text{D.P.D})$ ، $\mu_9 = (\text{D.S.D})$ و $k_6 \sim \text{S.H} = \sqrt{\epsilon}$
فإن $\dots = \mu_P$.

۴] اور اس کلامہ الاشغال الایة ، حیث له صاحب شفا ، ثم العمل :-



$$\zeta_9 \dots = (\phi \circ P \Delta) \tau$$

فصل ۲ (۵۵۵۵) = ...



□ P ج مثلث قائم الزاوية ضرب ، رسمت المثلثات المتساوية الأضلاع P ب س ، ب ج هـ

6. جمع. اثبت انه $m(P \vee Q) = m(P) + m(Q)$ $m(P \wedge Q) = m(P) \cdot m(Q)$

٦) P ب ج مثلث فيه $\frac{BP}{PQ} = \frac{2}{3}$ ، رسمت الدائرة المارة ب Q ومسه عند نقطة B رسم

المماس لهذه الدائرة تقطع PQ في A . اثبت أنه $\frac{AP}{AQ} = \frac{BP}{PQ}$.

٧) P ب ج د متوازي أضلاع ، $S \in AP$ ، $T \in BP$ حيث $BS = PC$ ،

، $U \in DT$ ، $V \in CT$ حيث $BU = CV$ ، رسم متوازي الأضلاع $STUV$ من

اثبت أنه $\frac{ST}{TV} = \frac{BP}{PQ}$.

٨) P ب ج د ، S من CD ومضلعاه متساويان ، فإذا كانت M منتصف BD ،

، N منتصف AD . اثبت أنه M (المضلع P ب ج د) : M (المضلع S من CD) = $(M : S) : (N : D)$

٩) P ب ج مثلث قائم الزاوية ضرب ، $BD \perp AP$ ، يقطعه في S ، رسم على AP

، T المربع PS من BD ، B م N ج خارج المثلث P ب ج .

(١) اثبت أنه : المضلع S من PS من B م المضلع S ب م N ج .

(٢) إذا كان $BP = 6$ ، $AP = 10$. أوجد النسبة بين مساحة سطح المضلعين

١٠) P ب ج مثلث فيه AP ، BD ، AP ج أضلاع متناظرة لثلاثة مضلعا

متشابهة مرسومة خارج المثلث ، وهي المضلعات S ، U ، V على الترتيب

فإذا كانت مساحة المضلع S = 10 سم^٢ ومساحة المضلع U = 80 سم^٢

ومساحة المضلع V = 100 سم^٢ . اثبت أنه المثلث P ب ج قائم الزاوية .

١١) P ب ج د مربع قمت AP ، BD ، BT ، DM بالنقاط S ، U ، V ، L

بنسبة ١ : ٣ اثبت أنه :-

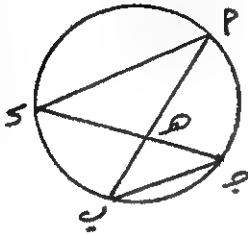
(١) الشكل S من U ل مربع .

(٢) $\frac{S}{U} = \frac{M}{N}$ (المربع S من U ل) (المربع P ب ج د)

د) "تطبيقات التشابه من الدائرة"

تمرينه مشهور :-

إذا تقاطع السطحان الخارجيان للوترين AB و CD للدائرة من نقطة H



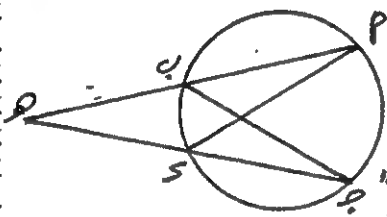
فإنه $HA \times HC = HB \times HD$

المعطيات :- AB و CD وتران متقاطعان في H

المطلوب :- اثبات أنه $HA \times HC = HB \times HD$

الحل :- نرسم AC و BD

البرهان :- ض $\triangle HPA$ و $\triangle HDB$ فيها



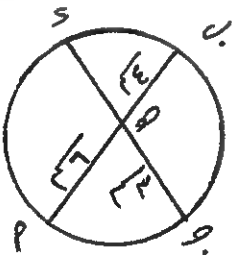
$\angle HPA = \angle HDB$ (م (د ه ب) محيطيات مشتركتان في ب) $\angle HPA = \angle HDB$ (م (د ه ب) محيطيات مشتركتان في ب)

$\therefore \triangle HPA \sim \triangle HDB$ وبتبع أنه $\frac{HA}{HD} = \frac{HP}{HB} = \frac{HP}{HD}$

\therefore من النسبة الأولى والثانية يتبع $HA \times HC = HB \times HD$ #

مكتبة واس
شؤون - شارع حسي مبارك - خلف الثانوية ب
01004423597 - 3943035

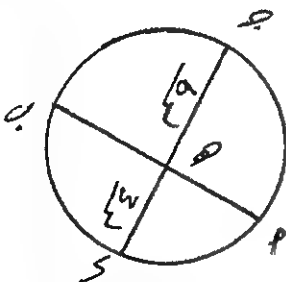
مثال ① :- من الشكل المقابل :-



$HA = 6$ ، $HB = 4$ ، $HC = 3$ ، $HD = 2$ أو $HA = 6$ ، $HB = 4$ ، $HC = 3$ ، $HD = 2$

الكل :- $\therefore \triangle HPA \sim \triangle HDB$

$\therefore HA \times HC = HB \times HD$ $\Rightarrow 6 \times 3 = 4 \times 2$ $\Rightarrow 18 = 8$ \Rightarrow خطأ

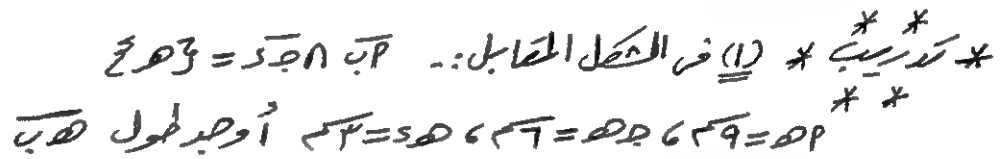


مثال ② :- من الشكل المقابل :- $\triangle HPA \sim \triangle HDB$

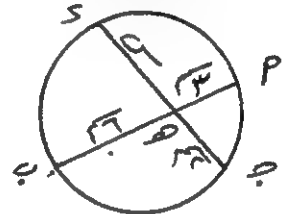
إذا كان $\frac{HA}{HD} = \frac{HP}{HB}$ ، $HA = 6$ ، $HB = 4$ ، $HC = 3$ ، $HD = 2$

أو $HA = 6$ ، $HB = 4$ ، $HC = 3$ ، $HD = 2$

الابداع في الرياضيات

$$S \cap X \cap P = C \cap X \cap P \therefore E \cap S = \overline{S \cap P} \cap \overline{C \cap P} \therefore$$
$$\sqrt{1} = 1 \leq 3 = 2^{(1 \div 2)} \leq 37 = 2^{(11 \div 2)} \leq 2 \times 9 = 18 \leq 2 \times 2 \leq 2 \therefore$$
$$\# \quad \nabla r = \partial r = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \nabla \varepsilon = \partial \varepsilon = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \therefore$$


(٥) أوجه قيمية من غير كل هذه الأشكال الآتية :-



مثال ۳ من الشكل المقابل :- إذا كانه



الحل :- ∴ P نقطة خارج الدائرة ، $\vec{PA} \perp \vec{PB}$ ، $\vec{PA} \perp \vec{PB} = \vec{PC}$

$$1C \times \emptyset P = 9X \Sigma \Leftarrow 5P \times \emptyset P = \emptyset P \times 4P \therefore$$

$$\sqrt{3} = \frac{37}{15} = OP \leftarrow OP \text{ IC} = 37$$



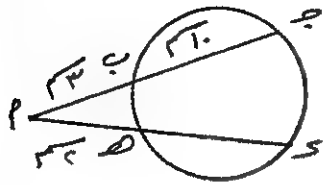
اُوجِدْ طُولَ بَعْدِ

الكل :- $\therefore \vec{P} \perp \vec{AB} \Rightarrow \vec{AB} \cdot \vec{P} = 0 \Leftarrow$ بفرض أن \vec{P} هو σ

$$(0+0)0 = 10 \times 2 \neq 10 \times 4 = 0 \times 50 \therefore$$

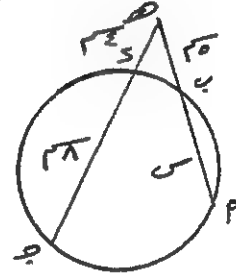
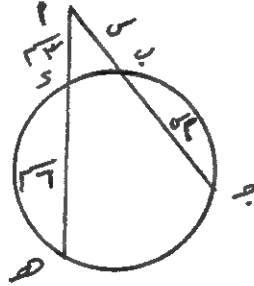
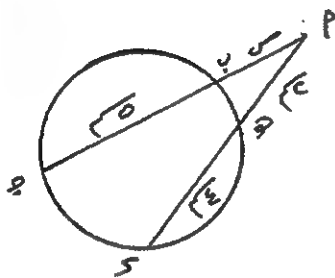
$$\cdot = (8-5)(9+5) \Leftarrow \cdot = 37 - 50 + 5 \Leftarrow 50 + 5 = 37$$

∴ س = ٩ (مفوضه) ، س = ٤ ∴ طول ب هـ = ٣٦



* * * تدريب * (١) من الشكل المقابل :-
أوجد طول د هـ

(٢) أوجد قيمة س من كل من الاشكال الآتية :-



نتيجة (١) :-

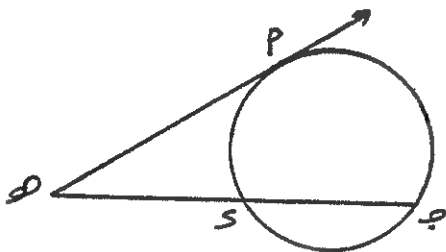
إذا رسم من نقطة خارج دائرة حاملة ومماس خارجة من تلك النقطة حيزه حاصل ضرب طول القاطع

من طول حيزه الخارج يساوي مربع طول المماس .

من الشكل المقابل :- P مماس للدائرة ،

هـ جـ يقطع الدائرة من س ، جـ

$$\left(P هـ \right) = هـ س \times هـ جـ$$

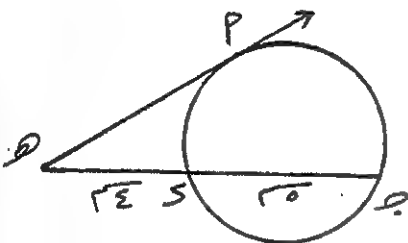


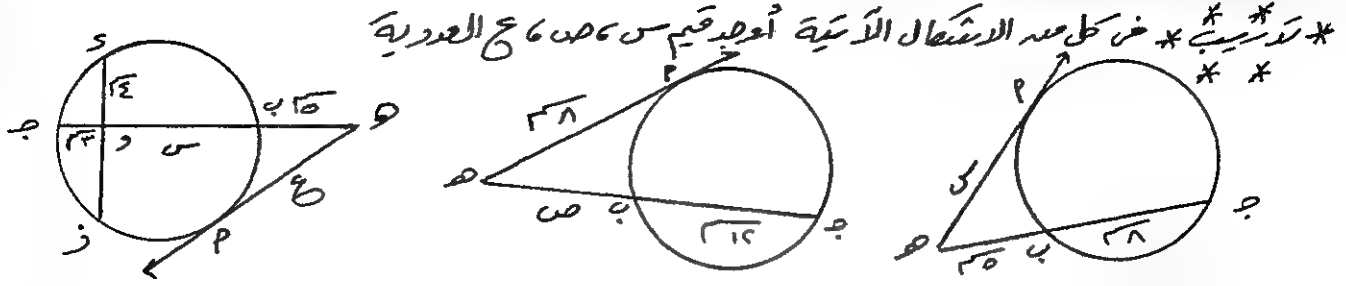
مثال © :- من الشكل المقابل :- هـ مماس للدائرة عند جـ

هـ س = ٤ سم ، جـ س = ٩ سم أوجد طول هـ م

الحل :- هـ م مماس للدائرة

$$\therefore (P هـ) = هـ س \times هـ جـ = (١ هـ) = ٩ \times ٤ = ٣٦ \leftarrow P هـ = ٣٦$$





عكس مبرهن مشهور :-

إذا تقاطع المستقيمان الخارجيان للقطعة AB ، CD من نقطة H (مختلفة عن كل من P, B, C, S) وكان $H \times P = H \times B = H \times C = H \times S$ فإنه النقطة P, B, C, S تقع على دائرة واحدة



من الشكل المقابل :-
إذا كان $H \times P = H \times B = H \times C = H \times S$
فإنه الشكل P, B, C, S ياتي دائري

مثال ٦ :- من الشكل المقابل :-

اثبت أنه الشكل H, B, C, P ياتي دائري

$$\text{الحل :-} \because H \times P = H \times B = H \times C = H \times S$$

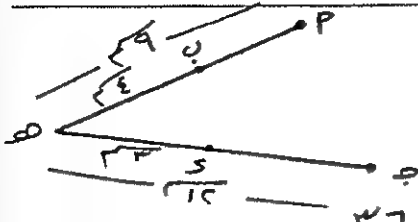
$$\because H \times P = H \times B = H \times C = H \times S$$

$$\because H \times P = H \times B = H \times C = H \times S$$

\therefore النقطة H, B, C, P تقع على دائرة واحدة ويكون الشكل H, B, C, P ياتي دائري

في "ملاحظة" :- يحل المثال السابق بانجاح تشابه المثلثين H, B, C, P و H, C, P, S

سؤال ٧ :- من الشكل المقابل :-



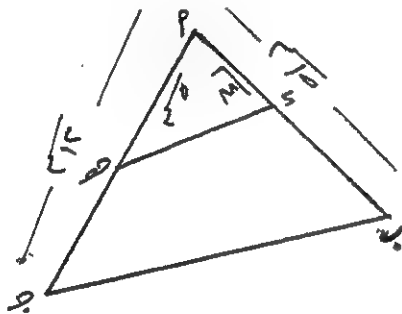
اثبت أنه الشكل P ب س ج ياعي دائري.

الحل :- $\therefore P \times B \times S = 40 \times 90 = 3600$ $\therefore P \times B \times S = 30 \times 110 = 3300$

$\therefore P \times B \times S = 3600$

$\therefore P \times B \times S = 3300$

الشكل P ب س ج ياعي دائري #

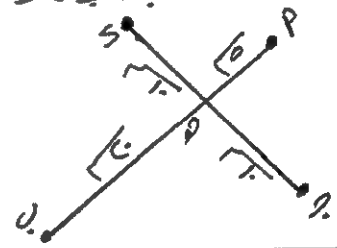
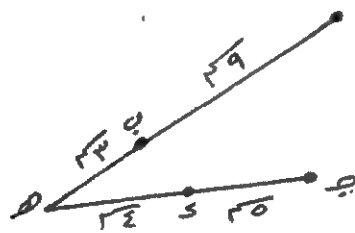
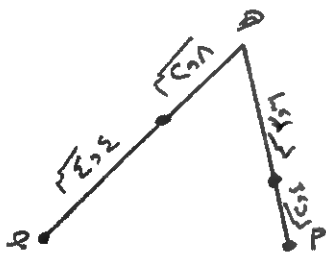


* * * ترتيب * * *
من الشكل المقابل :-

اثبت أنه الشكل S ب ج ه ياعي دائري

(c) من أي هذه الاشكال الآتية تقع النقطة

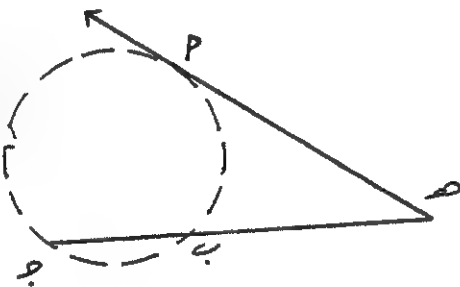
P ب ج ه س على دائرة واحدة ؟ فسر واطبق



نتيجة (c) "

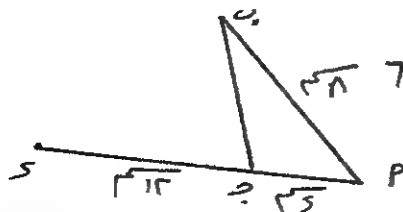
إذا كان $(P \times B \times S) = (P \times B \times S)$

فإنه ه س ب ج ه ياعي للدائرة المارة بالنقطة P ب ج ه س



سؤال ٨ :- P ب ج ه س فيه P ب = S ب = ٦ سم ، P ج = ٨ سم ، S ج = ٦ سم ، P ه = ٨ سم ، S ه = ٦ سم

حيث ج ه = ٨ سم . اثبت أنه P ب ه ياعي الدائرة المارة بالنقطة ب ج ه س



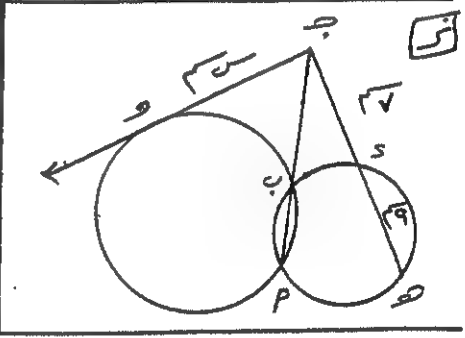
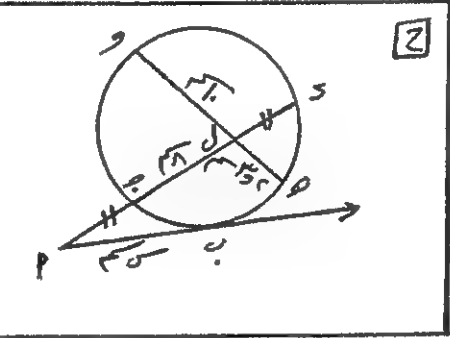
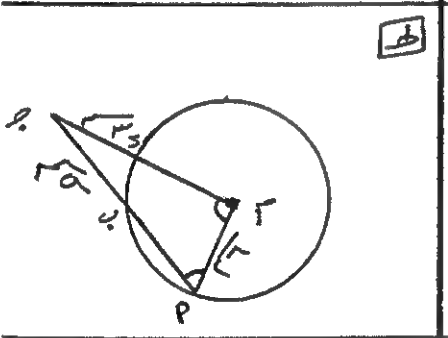
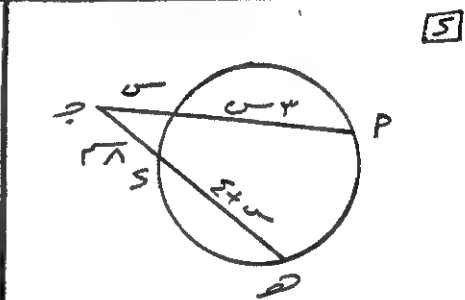
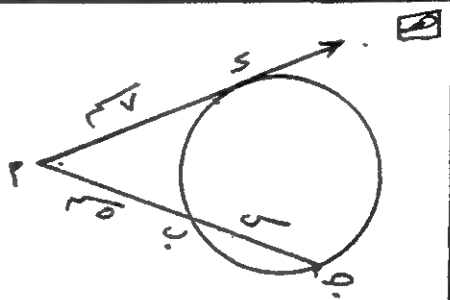
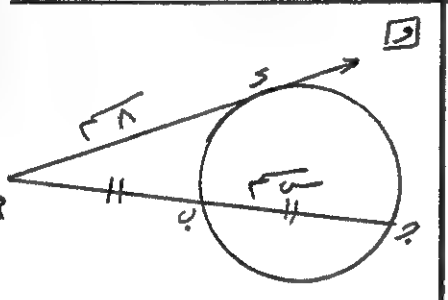
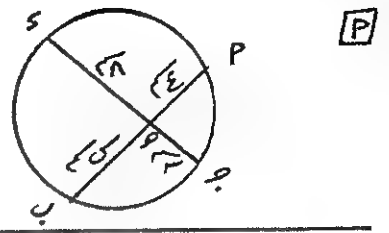
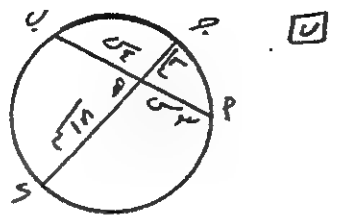
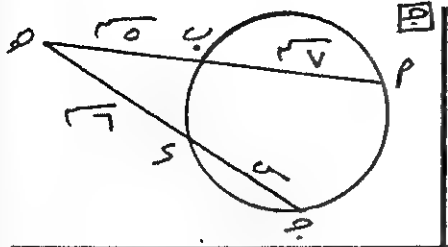
الحل :- $\therefore (P \times B \times S) = (P \times B \times S) \therefore 6 \times 8 = 48$ $\therefore 6 \times 8 = 48$

$\therefore (P \times B \times S) = 48$

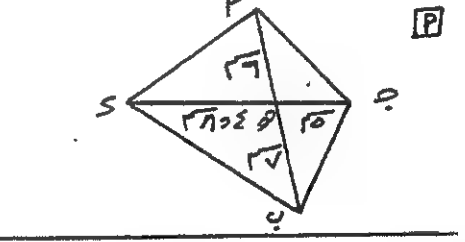
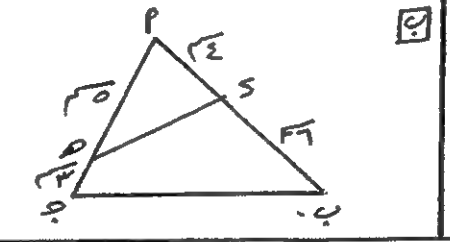
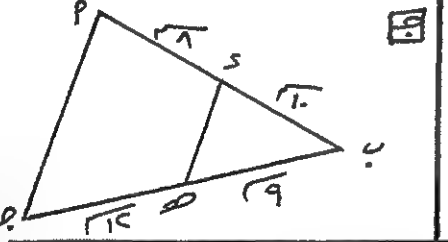
$\therefore P \times B \times S = 48$

عماد السيد على "تطبيقات التشابه من الدائرة"

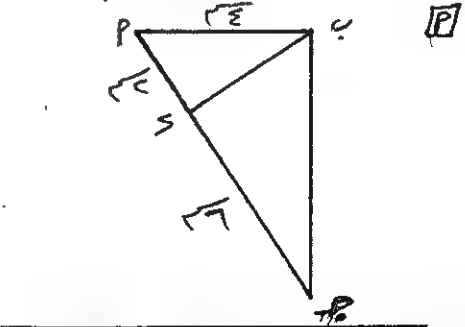
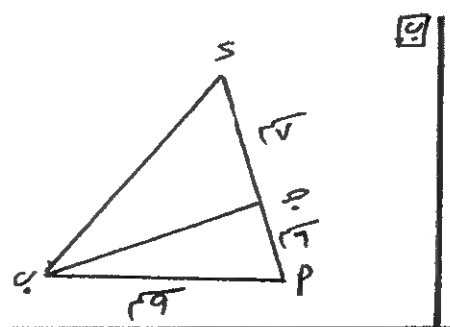
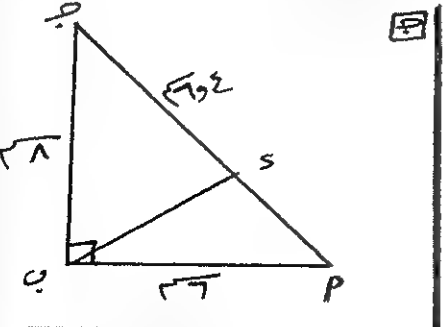
1 أوجد قيمة x من العديد من كل من الاشكال الآتية :-



2 من أى من الاشكال الآتية تقع النقطة P ، B ، C ، S على دائرة واحدة، فسر واجاب



3 من أى من الاشكال التالية P ، B ، C ، S تقع على دائرة واحدة، فسر واجاب



الصف الأول الثانوي

(c) الشكل لصوم ياعن وانري

جـ هـ = سم أثبت أن النقط P, Q, R, S تقع على دائرة واحدة

عاصمیانہ للذاتۃ عندس، من . اُنْجَبَ اُنْه : جس = جس

۱) اُبج حلقہ، س ڈیو، صیغہ ۵ = ۴۵، ۴ = ۵۵، ۶ اذاکہ ۲ = ۵۶

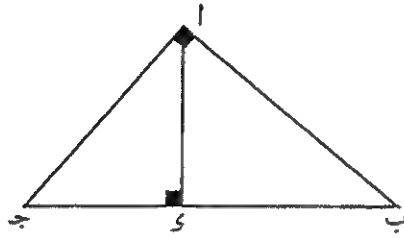
$$9:0 = (\exists \cup P \Delta)^P : (\sup \Delta)^P (u) \quad P \exists \cup \Delta \sim \sup P \Delta \quad (c)$$

الدائرة الكبرى ليقطع الدائرة الصغرى في ب، ج على الترتيب أجبته: $AP \times PB = 90$

فرضه، \bar{P} و X است. نتیجه آنکه $P \cup X = P$ و هم‌اوجده طول P

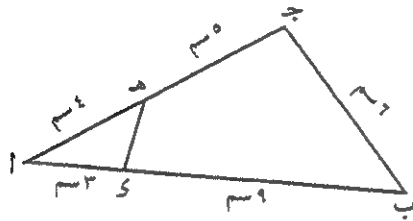
اثبت أنه $جس = جوص$

تمارين عامة



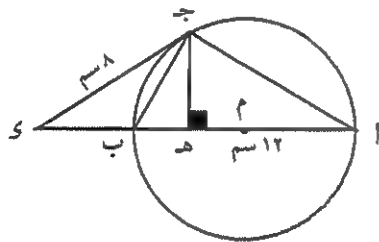
١ في الشكل المقابل: أي العبارات التالية غير صحيحة:

- أ) $AD^2 = BD \times DC$
- ب) $AB^2 = BD \times BC$
- ج) $AD \times BC = BD \times AC$
- د) $AB \times AC = AD \times BC$



٢ في الشكل المقابل: $AB \parallel DE$ ، $AD = 3$ ، $DB = 4$ ، $AE = 2$ ، $EC = 3$.

أثبت أن $\triangle ADE \sim \triangle ABC$
ثم أوجد طول DE



٣ في الشكل المقابل: AB قطر في الدائرة م، طوله ١٢ سم

و $AB \parallel CD$ حيث $AD = ١٦$ سم، CD تقع على الدائرة

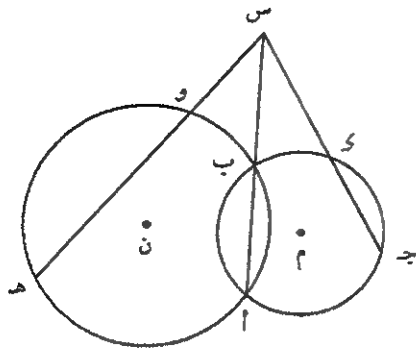
حيث $CD = ٨$ سم. $CD \perp AB$. أثبت أن:

- أ) CD مماسة للدائرة م.
- ب) $\triangle ACD \sim \triangle ABC$
- ج) $CD = ٨$ ، $AD = ١٦$

٤ أ ب ج مثلث قائم الزاوية في ب. $AB \perp AC$ ، $AB = ١٥$ سم، $AC = ٩$ سم. رسم على AB ، B ج من

الخارج المربعان AB ص س، B ج هـ و.

- أ) أثبت أن المضلع AS ص ب \sim المضلع B و هـ جـ
- ب) أوجد م (المضلع AS ص ب): م (المضلع B و هـ جـ)



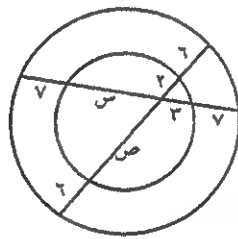
٥) في الشكل المقابل: الدائرتان م، ن متقاطعتان في أ، ب

$$\overline{أب} \cap \overline{ج د} \cap \overline{ه و} = \{س\} \text{ حيث}$$

$$س د = ٢ \text{ سم، ج ه} = ١٠ \text{ سم، و س} = ٦ \text{ سم}$$

٦) أثبت أن الشكل ج د و ه رباعي دائري.

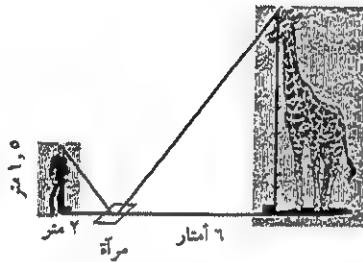
٧) أوجد طول ج د



٨) في الشكل المقابل: دائرتان متحدتا المركز،

والأطوال المبينة للقطع المستقيمة بالسنتيمترات.

أوجد قيم س، ص العددية.



٩) حديقة حيوان: في رحلة مدرسية إلى حديقة الحيوان أراد

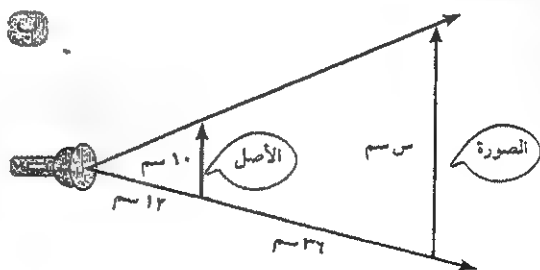
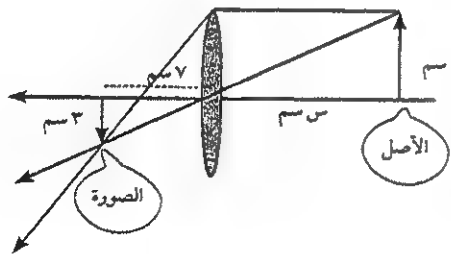
حسام أن يعرف ارتفاع حيوان الزرافة. وضع حسام مرآة

مستوية على الأرض تبعد عنه متران وعن الزرافة ٦ أمتار،

فإذا كان حسام والمرآة والزرافة على استقامة واحدة

وارتفاع حسام ١,٥ مترًا. كم يبلغ ارتفاع الزرافة.

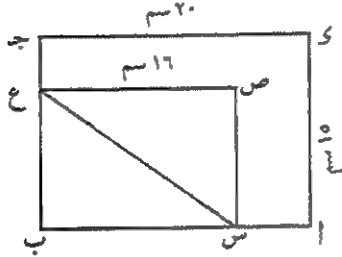
١٠) البسط بالفيديو: احسب معامل مغير البعد، واحسب قيمة س العددية في كل شكل مما يلي.



اختبار الوحدة

١) أكمل ما يأتي:

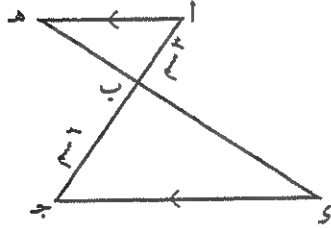
- ١) المضلعان المشابهان لثالث
- ٢) إذا تناسبت أطوال الأضلاع المتناظرة في مثلثين فإنهما
- ٣) إذا كانت النسبة بين محيطي مضلعين متشابهين ٣ : ٥ فإن النسبة بين مساحتهما
- ٤) إذا تقاطع وتران \overline{AB} ، \overline{CD} لدائرة في نقطة S فإن:



٥) إذا كان المستطيل AB \sim المستطيل SC ب E ص،

$$AS = 15 \text{ سم، } CS = 20 \text{ سم، } ES = 16 \text{ سم}$$

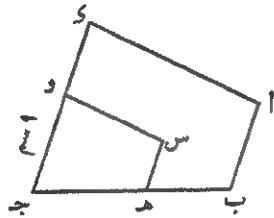
فإن: $SC =$ _____



٦) في الشكل المقابل: $\overline{AH} \parallel \overline{DE}$ ، $\overline{AG} = \overline{HD}$ ، $\angle B$ ،

$$AB = 3 \text{ سم، } BC = 6 \text{ سم، } HD = 12 \text{ سم}$$

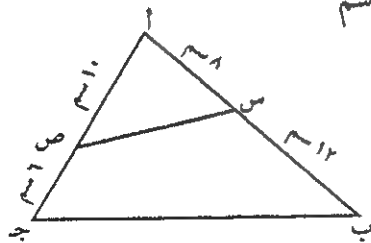
فأوجد طول \overline{HB}



٧) في الشكل المقابل: المضلع AB \sim المضلع SC هـ جـ و

أثبت أن $\overline{AB} \parallel \overline{SC}$

وإذا كانت $SC = \frac{1}{4} AB$ ، جـ و = ٩ سم فأوجد طول \overline{SC}



٨) AB جـ مثلث فيه $S \in \overline{AB}$ بحيث كان $AS = 8 \text{ سم}$ ، $SB = 12 \text{ سم}$

ص $\in \overline{AC}$ ، بحيث كان $AS = 10 \text{ سم}$ ، $SC = 6 \text{ سم}$.

أثبت أن:

١) $\triangle ABC \sim \triangle S$

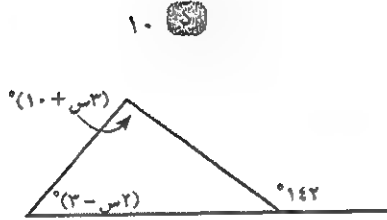
٢) الشكل SB جـ ص رباعي دائري.

٩) AB ، \overline{CD} وتران في دائرة متقاطعان، في H فإذا كان H منتصف \overline{AB} ، جـ هـ = ٤ سم، هـ د = ٩ سم
فأوجد طول \overline{AB} .

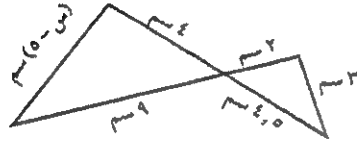
اختبار تراكمي

أسئلة الاختيار من متعدد

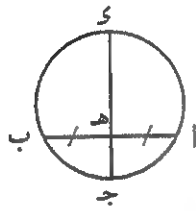
- ١) إذا كان $\frac{1+s}{1+s} = \frac{2}{3}$ فإن $11-s$ تساوي:
 ١٠ ☐ ٥ ☐ صفرًا ☐ ١٠٠ ☐



- ٢) مستعينًا بمعطيات الشكل، فإن s تساوي:
 ١٨ ☐ ٣٢ ☐ ٥١ ☐ ٢٧ ☐

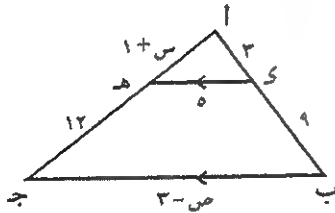


- ٣) مستعينًا بمعطيات الشكل، فإن s تساوي:
 ١١ ☐ ٥ ☐ ١٤ ☐ ١٢ ☐



- ٤) في الشكل المقابل: $AB = 12$ سم، $جـه = 4$ سم، فإن $هـ$ تساوي:
 ٦ سم ☐ ٥ سم ☐ ٩ سم ☐ ٨ سم ☐

- ٥) مستطيلان متشابهان بعدد الأول ١٠ سم، ٨ سم، ومحيط الثاني ١٠٨ سم فإن طول المستطيل الثاني يساوي:
 ٣٦ سم ☐ ٣٠ سم ☐ ٢٤ سم ☐ ١٨ سم ☐

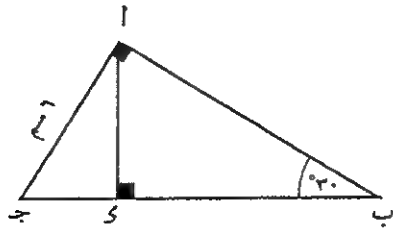


الأسئلة ذات الإجابات القصيرة:

- ٦) في الشكل المقابل: أوجد قيمة كل من s ، $ص$ ، الأطوال مقدرة بالسنتيمترات.

- ٧) AB جـ مثلث فيه $AB = AC$ و $جـ \in B$ جـ. رسم $جـه \perp AB$ ، و $و \perp AC$ جـ.

$$\text{أثبت أن: } \frac{جـه}{جـو} = \frac{بـه}{جـو}$$



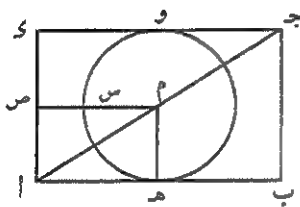
٨) في الشكل المقابل: $\overline{AB} \perp \overline{AD}$ ، $\overline{AC} \perp \overline{AD}$ ، $\overline{AD} \perp \overline{BC}$

و $\angle B = 30^\circ$ ، $AC = 6$ سم

أوجد طول كل من: \overline{AB} ، \overline{BC} ، \overline{AD}

التمارين ذات الإجابات الطويلة:

٩) \overline{AB} جد \overline{BC} شبه منحرف تقاطع قطراه في هـ، إذا كان $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ أثبت أن: $\frac{AH}{HB} = \frac{CE}{EB}$



١٠) في الشكل المقابل: \overline{AB} جد \overline{BC} مستطيل، م دائرة طول نصف قطرها ٦ سم

وتمس \overline{AB} عنده، \overline{AD} عند و.

رسم م ص $\parallel \overline{AB}$ ويقطع الدائرة في س، \overline{AD} في ص.

إذا كان: س ص = ٢ سم، $\frac{1}{4} = \frac{AM}{MB} = \frac{CN}{ND}$

أوجد طول \overline{BC} ، \overline{AD}

الوحدة الرابعة

نظريات التناسب في المثلث

(١) المستقيمات المتوازية والاجزاء المتناسبة

(٢) نظرية تاليس

(٣) منصفات الزوايا والاجزاء المتناسبة

(٤) تطبيقات التناسب في الدائرة

تمارين عامة علي الوحدة

اختبار الوحدة

(١) المستقيمان المتوازيين والأجزاء المتناسبة

نظرية (١) :-

إذا رسم مستقيم يوازي أحد أضلاع مثلث وقطع الضلعين الآخرين فإنه

يقسمهما إلى قطع أطوالها متناسبة .

في الشكل المقابل :- ΔPAB فيه $DE \parallel AB$

$$\therefore \frac{DP}{PB} = \frac{EP}{PA}$$

كما لاحظ أنه :-

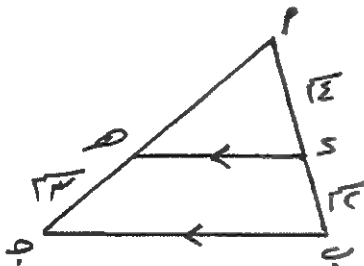
$$\left(\frac{\text{مقدم} + \text{تالي}}{\text{تالي}} = \frac{\text{مقدم} + \text{تالي}}{\text{تالي}} \right)$$

"مخرجي من القياس"

$$\frac{DP}{PB} = \frac{EP}{PA} \Leftrightarrow \frac{DP + PB}{PB} = \frac{EP + PA}{PA} \Leftrightarrow \frac{PB}{PB} = \frac{PA}{PA}$$

$$\therefore \frac{DP}{PB} = \frac{EP}{PA} \quad \text{أي أنه :-}$$

$$\frac{DP}{PB} = \frac{EP}{PA} \quad \text{وعكسه استنتاج أيضًا :-}$$

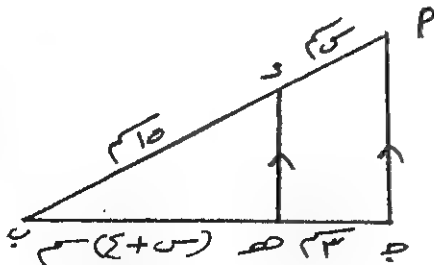


مثال ١ :- في الشكل المقابل :-

أوجد طول PE

الحل :- $DE \parallel AB$

$$\therefore \frac{DP}{PB} = \frac{EP}{PA} \Leftrightarrow \frac{12}{17} = \frac{EP}{17} \Leftrightarrow EP = 12$$



مثال ٢ :- في الشكل المقابل :-

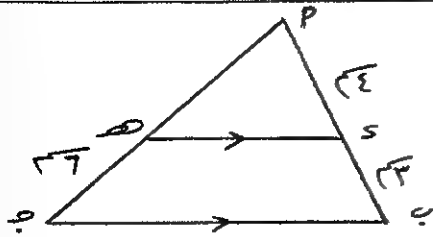
أوجد قيمة x

الحل :- $DE \parallel AB$

$$\therefore \frac{PD}{PB} = \frac{DE}{AB} \Leftrightarrow \frac{10}{5+x} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow 50 = 3(5+x) \Leftrightarrow 50 = 15 + 3x \Leftrightarrow 35 = 3x \Leftrightarrow x = \frac{35}{3}$$

$$\therefore 50 = 15 + 3x \Leftrightarrow 35 = 3x \Leftrightarrow x = \frac{35}{3}$$

$$\# \boxed{x = \frac{35}{3}}$$

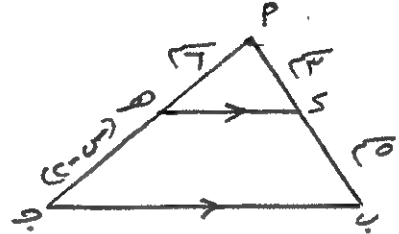
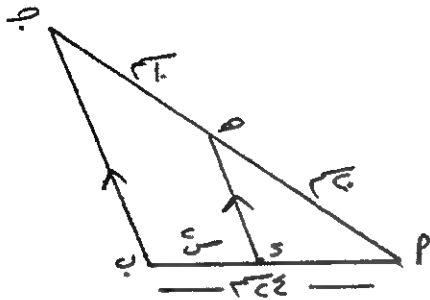


* * * تدريب * (١) من الشكل المقابل :-

PD بجهته SC و PB و SC و PA و SC

أوجد طول AP

(٢) أوجد قيمة س العددية من كل مما يأتي :-

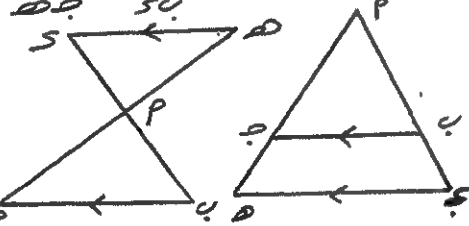


"نتيجة" :- إذا رسم مستقيم خارج مثلث PAB يوازي ضلعاً من أضلاع المثلث ،

ولم يكن بهجه ويقطع PA و PB من على الترتيب فإنه $\frac{AP}{SP} = \frac{BP}{CP}$

من الشكل المقابل :- بتطبيق خواص التقاسيم

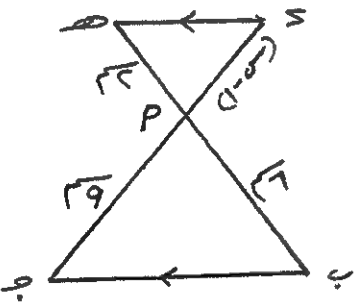
$$\frac{AP}{SP} = \frac{BP}{CP} \quad \text{و} \quad \frac{AP}{SP} = \frac{BP}{CP}$$



مثال (٣) :- من الشكل المقابل :-

أوجد قيمة س

الحل :- $SC \parallel AB$



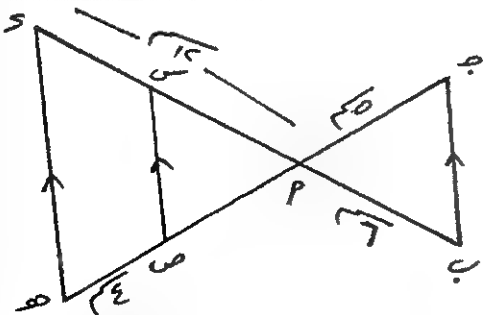
$$\frac{AP}{SP} = \frac{BP}{CP} \Rightarrow \frac{9}{4} = \frac{6}{3} \Rightarrow 9 = (1-S) \cdot 3 \Rightarrow 3 = 1-S \Rightarrow S = 2$$

$$S = 2$$

مثال (٤) :- من الشكل المقابل :-

أوجد طول كل من AP و SC

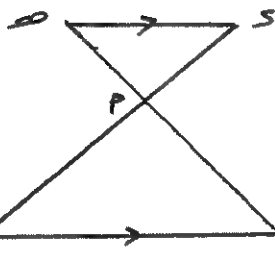
الحل :- $SC \parallel AB$ $\therefore \frac{AP}{SP} = \frac{BP}{CP}$



$$\therefore \frac{SP}{PS} = \frac{1}{2} \Leftarrow SP = \frac{1 \times 10}{2} = 5$$

$$\text{في } \triangle SPQ \therefore \frac{SP}{PS} = \frac{PQ}{SQ} \therefore \frac{5}{10} = \frac{PQ}{10} \therefore PQ = 5$$

$$\therefore \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Leftarrow \frac{10}{10} = 1 \therefore \text{م.م.}$$



* * *
نظريته (1) في الشكل المقابل :-

$$AB \parallel CD \therefore \frac{PA}{PC} = \frac{PB}{PD}$$

$$PA = 5, PB = 10, PC = 10, PD = 20 \therefore \frac{5}{10} = \frac{10}{20}$$

(2) في الشكل المقابل :-

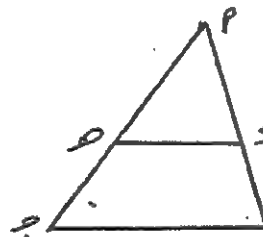
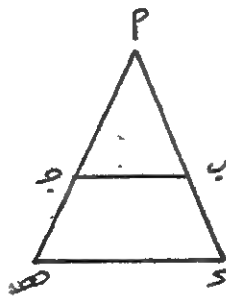
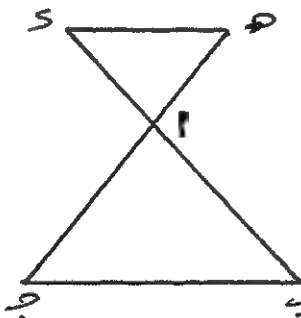
$$\text{إذا كان } PA = 5, PB = 10, PC = 10, PD = 20 \therefore \frac{5}{10} = \frac{10}{20}$$

$$\text{إذا كان } PA = 5, PB = 10, PC = 10, PD = 20 \therefore \frac{5}{10} = \frac{10}{20}$$

عكس نظرية (1) :-

إذا قطع مستقيم خطين متوازيين، وقسموا إلى أطوال متناسبة

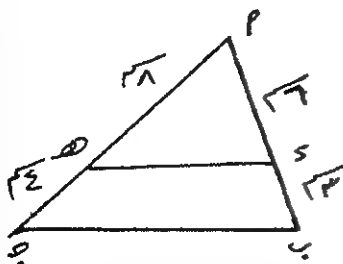
فإنه يوازي الضلع الثالث.



في الشكل المقابل :-

$$\text{إذا كان } \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \therefore \frac{5}{10} = \frac{10}{20}$$

فإنه يوازي الضلع الثالث



مثال ٥ :- في الشكل المقابل، أثبت أن DE // AB

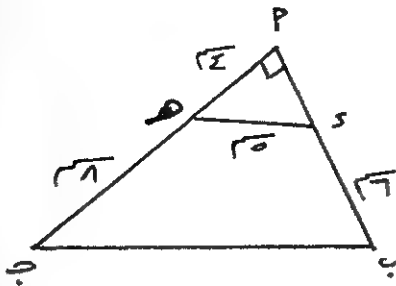
$$\text{الحل :- في } \triangle ABC \therefore \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \therefore \frac{5}{10} = \frac{10}{20} \therefore \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \therefore DE \parallel AB$$

مثال ⑥: في الشكل المقابل: ΔPAB مثلث قائم الزاوية في P

(1) اثبت أنه $DP \parallel AB$ (2) أوجد طول DP

الحل: -



ΔPAB قائم في $P \Rightarrow (PA)^2 = (DP)^2 + (PB)^2$ "ثيلاجورث"

$$12^2 = 3^2 + 10^2 \Rightarrow 144 = 9 + 100 \Rightarrow 144 = 109 \text{ (خطأ)}$$

ΔPAB قائم في P

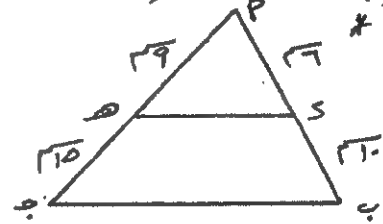
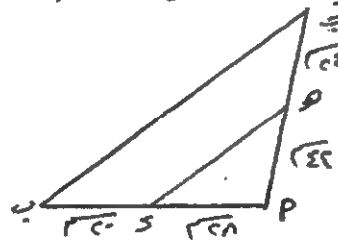
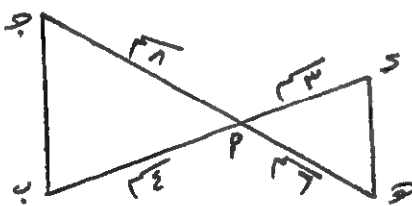
$$\frac{DP}{PB} = \frac{PA}{AB} \Rightarrow \frac{3}{10} = \frac{12}{16}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{10} = \frac{DP}{PB} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{3}{10} = \frac{DP}{10} \Rightarrow DP = 5$$

$$\frac{DP}{PB} = \frac{PA}{AB} \Rightarrow \frac{3}{10} = \frac{12}{16} \Rightarrow \frac{3}{10} = \frac{3}{10} \Rightarrow \frac{3}{10} = \frac{3}{10}$$

$$\# \frac{3}{10} = \frac{9 \times 5}{3} = 15 \Rightarrow \frac{3}{10} = \frac{15}{50} \Rightarrow \frac{3}{10} = \frac{3}{10}$$

* * * تدرب * * * في كل مرة الاستعمال الآتية عندما إذا كان $DP \parallel AB$ أم لا



مثال ⑦: ΔPAB مثلث قائم الزاوية في P ، D نقطة على AB حيث $DP \parallel AB$

رسم مربع $ABCD$ وقطع PD خارج. اثبت أنه $PD \parallel AC$

الحل: - في ΔPAB

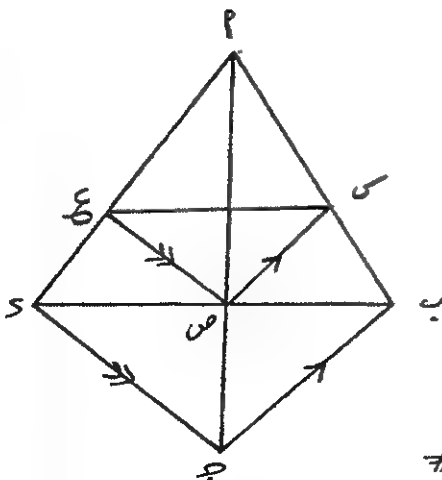
$$\frac{PD}{PB} = \frac{PA}{AB} \Rightarrow \frac{PD}{10} = \frac{12}{16} \Rightarrow PD = 7.5$$

في ΔPAB

$$\frac{PD}{PB} = \frac{PA}{AB} \Rightarrow \frac{PD}{10} = \frac{12}{16} \Rightarrow PD = 7.5$$

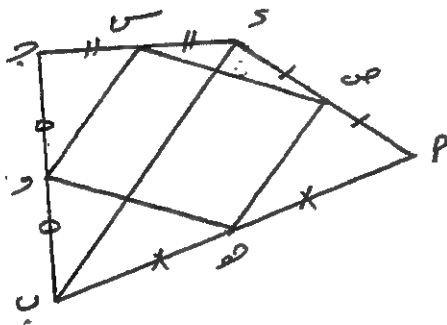
$$\text{ملاحظة ①، ② ينتج أنه } \frac{PD}{PB} = \frac{PA}{AB} \Rightarrow \frac{PD}{10} = \frac{12}{16} \Rightarrow PD = 7.5$$

$$\# \text{ في } \Delta PAB: \frac{PD}{PB} = \frac{PA}{AB} \Rightarrow \frac{PD}{10} = \frac{12}{16} \Rightarrow PD = 7.5$$



* تدريس * مبدى شكل رباعي تقاطع قطراه م. رسم م ه // P و تقطع P ب م ه
رسم م د // ا ب و تقطع ب م ه و. أثبت أنه ه د // ا ب .

مثال ① :- إذا كان ه، و، س من منتصفات الأضلاع P ب، م ه، دى، م ب من الشكل
الرباعي م ب دى. هل الشكل ه و س من متوازي أضلاع ؟



الحل :- القل :- نرسم ب دى

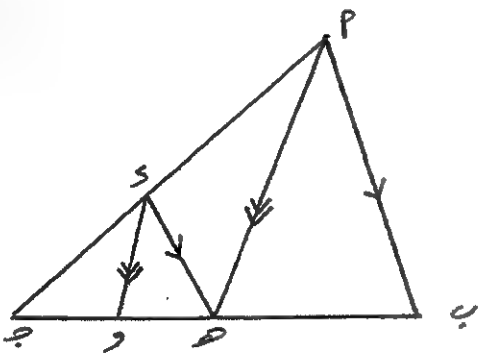
من م ب دى :- ه و منتصف P ب، م ه منتصف م دى

:- م ه // ا ب ، م ه = 1/2 ب م ← ①

من م ب دى :- و و منتصف ب م، م ه منتصف م دى

:- و س // ا ب ، و س = 1/2 ب م ← ②

من ①، ② يتبع أنه م ه // و س ، م ه = و س :- الشكل ه و س من متوازي أضلاع #



مثال ② :- من الشكل المقابل :- P ب دى مثلث م دى و ا ب

د ه // ا ب ، م د و ا م ه. أثبت أنه (م ه) = د و م ب

البرهان :-

من م ب دى :-

:- د ه // ا ب :- $\frac{م د}{م ب} = \frac{د ه}{ب م}$ ← ①

من م ب دى :-

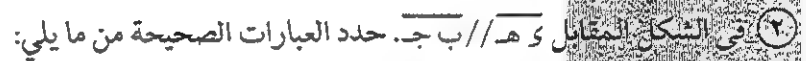
:- م د و ا م ه :- $\frac{م د}{م ب} = \frac{م ه}{ب م}$ ← ②




من ①، ② $\frac{م د}{م ب} = \frac{م ه}{ب م} \Rightarrow م ه = د و$ م ب = (م ه) #

تأريده على "المتغيرات المتوازية والأجزاء المتناسبة"



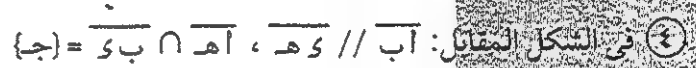
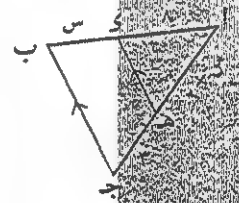
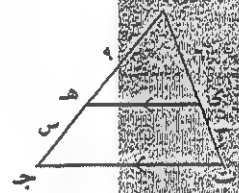
١. إذا كان $\frac{3}{5}$ فإن $\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{هـ}$ ، $\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{هـ}$
 ٢. إذا كان $\frac{٤}{٥}$ فإن $\frac{ج}{هـ} = \frac{أ}{ب}$ ، $\frac{ج}{هـ} = \frac{أ}{ب}$



$\frac{\text{بی}}{\text{اھ}} = \frac{\text{ای}}{\text{اھ}}$ 
 $\frac{\text{اھ}}{\text{اھ}} = \frac{\text{اھ}}{\text{اھ}}$ 
 $\frac{\text{اھ}}{\text{اھ}} = \frac{\text{اھ}}{\text{اھ}}$ 

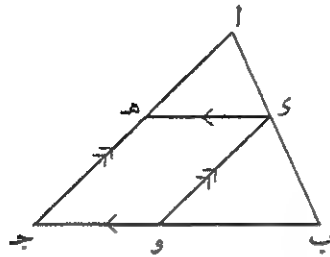
اَب = اَم
 اَب = اَم
 اَب = اَم
 اَب = اَم
 اَب = اَم

③ في كل من الاشكال التالية هـ // ب جـ. أوجد قيمة س العددية (الأطوال بالسنتيمترات).



اوجہ طول خط

٥) س ص ٨ ع ل = م، حيث س ع // ل ص، فإذا كان س م = ٩ سم، ص م = ١٥ سم، ع ل = ٣٦ سم. أوجد طول ع م.



٦) لكل مما يأتي: استخدم الشكل المقابل والبيانات المعطاة لإيجاد قيمة س:

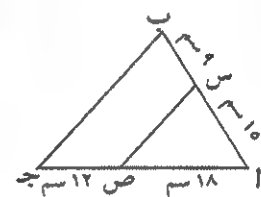
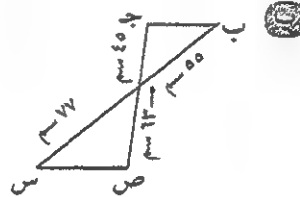
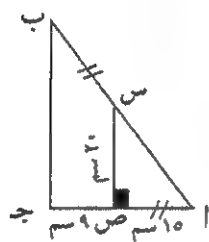
أ) ٤ = س، ٨ = ب، ٦ = ج، ٦ = د، ٨ = هـ = س.

ب) ٨ = س، ٥ = ج، ٢ = د، ٣ = ب.

ج) ٢١ = أب، ٨ = ب، ٦ = ج، ٦ = د، ٢ = ب.

د) ١٢ = س، ٥ = ب، ٥ = س، ٢ = ب، ٣ = ج.

٧) في كل من الأشكال التالية، حدد ما إذا كان س ص // ب جـ



٨) س ص ع مثلث فيه س ص = ١٤ سم، س ع = ٢١ سم، ل ٣ س ص بحيث س ل = ٦، ٥ سم،

م ٣ س ع حيث س م = ٨، ٤ سم. أثبت أن ل م // ص ع

٩) في المثلث أ ب جـ، د ٣ أ ب، هـ ٣ أ جـ، ٥ = هـ = ٤ = جـ

إذا كان أ د = ١٠ سم، د ب = ٨ سم. حدد ما إذا كان د هـ // ب جـ. فسر إجابتك.

١٠) أ ب جـ د شكل رباعي تقاطع قطراه في هـ فإذا كان أ هـ = ٦ سم، ب هـ = ٣ سم، هـ و = ١٠ سم،

هـ د = ٧، ٨ سم. أثبت أن الشكل أ ب جـ د شبه منحرف.

١١) أثبت أن القطعة المستقيمة المرسومة بين منتصفى ضلعين في مثلث يوازي ضلعه الثالث، وطولها يساوي نصف طول هذا الضلع.

١٢) أ ب جـ مثلث، د ٣ أ ب حيث أ د = ٢، ب هـ ٣ أ جـ حيث هـ جـ = ٢، رسم أ س يقطع ب جـ في س. إذا كان أ و = ٨ سم، أ س = ٢٠ سم، حيث و ٣ أ س. أثبت أن النقط د، و، هـ على استقامة واحدة.

١٣) أ ب جـ مثلث، د ٣ ب جـ، بحيث د جـ = ٢، هـ ٣ أ د، بحيث هـ د = ٢، رسم جـ هـ يقطع أ ب في س، رسم و ص // جـ س فقطع أ ب في ص. أثبت أن أ س = ب ص.

١٤) أ ب جـ د مستطيل تقاطع قطراه في م. هـ منتصف أ م، و منتصف م جـ. رسم و هـ يقطع أ ب في س، ورسم و يقطع ب جـ في ص. أثبت أن: س ص // أ جـ.

مكتبة وصال

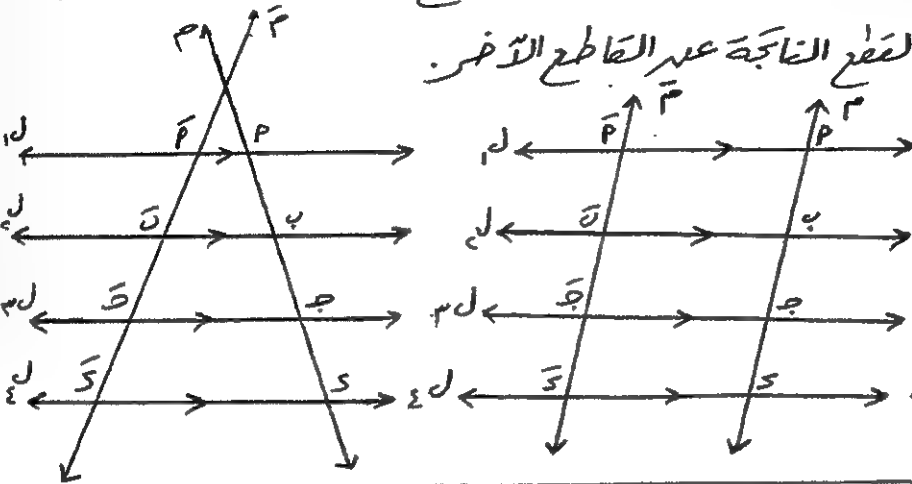
شروين - شارع حسني مبارك - خلف الثانوية بنات
01004423597.3943035

١١ نظرية تاليس

نظرية ١١ [نظرية تاليس العامة]:

إذا قطع مستقيمان عدة مستقيمتان متوازيتان فإِنَّ أطوال القطع الناتجة عند أحد القاطعين تكون متناسبة مع أطوال القطع الناتجة عند القاطع الآخر.

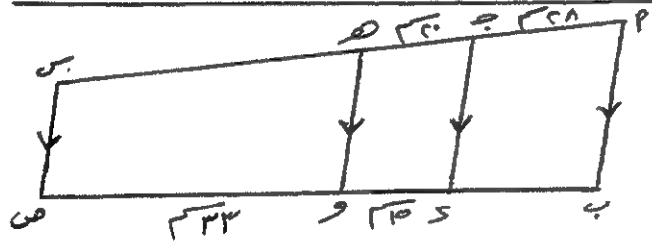
نظر الشكل المقابل:



إذا كان $a \parallel b \parallel c \parallel d$

و m, n قاطعين لهما. فإنه:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'} \dots$$



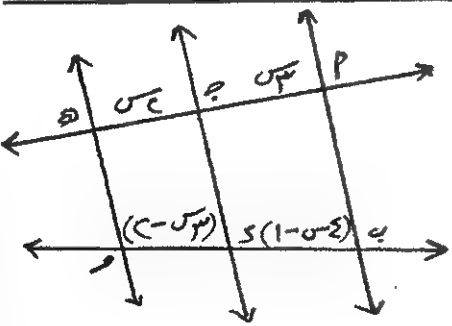
مثال ١: - في الشكل المقابل:

أوجد طول كل من BE و ED

الحل: - $\because AB \parallel CD \parallel EF$

$$\therefore \frac{AB}{BE} = \frac{CD}{ED} = \frac{EF}{FD} \Leftrightarrow \frac{3}{BE} = \frac{4}{ED} = \frac{5}{FD}$$

$$\therefore BE = \frac{3 \times 4}{5} = 2.4 \text{ سم} \quad \# \quad ED = \frac{4 \times 5}{5} = 4 \text{ سم}$$



مثال ٢: - في الشكل المقابل:

أوجد قيمة x العددية

الحل: - $\because AB \parallel CD \parallel EF$

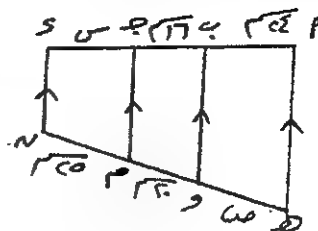
$$\therefore \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \Leftrightarrow \frac{3}{x} = \frac{4}{5} = \frac{5}{7-x}$$

$$3(7-x) = 4x \Leftrightarrow 21 - 3x = 4x \Leftrightarrow 21 = 7x \Leftrightarrow x = 3$$

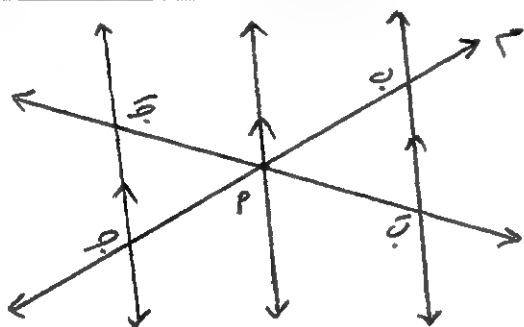
$$\therefore \boxed{x = 3}$$

الابداع في الرياضيات

(Handwritten signature)



إذا تقاطع المستقيمان m, n في النقطة P

$$\frac{\bar{c}_p}{\bar{c}_p} = \frac{c_p}{c_p}$$
$$\vec{v} \sim \frac{\vec{OP}}{OP} =$$


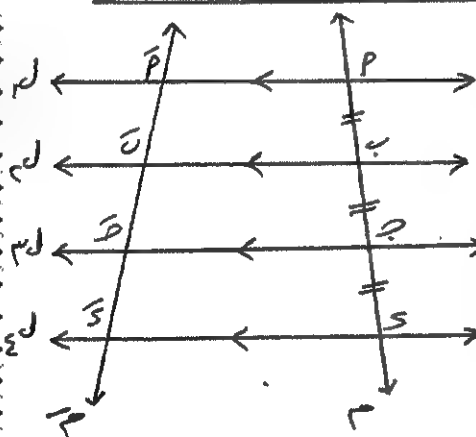
نظرية تاليس الخاصة :-

إذا كانت أطوال القطع الخارجة عند أحد القاطعين

مساوية فياه احوال الصقع الناجية على القاطع الاخر مساوية.

من الفصل المقابل :- لم ارجع الى الم ارجع الى م م كما طعناه كما

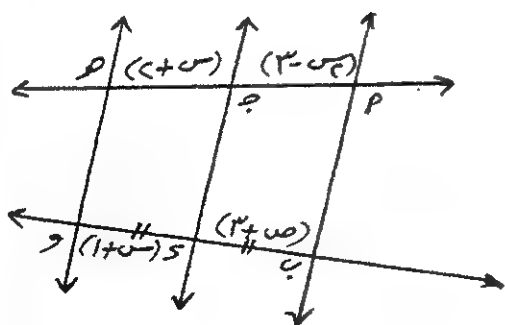
وكان $u_p = u_j = u_j$ فان $u_p = u_j = u_j$.



مسألة (٣) :- في السبطل المقابل :-

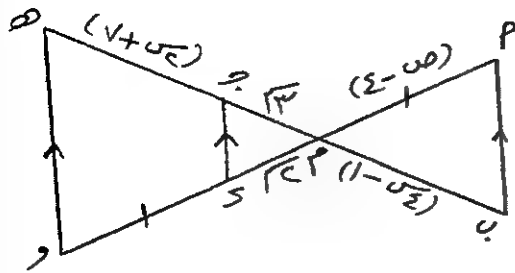
أوجد قيمه من الجدول

الحل :- :- P ب ۱۱ قی ۱۱ هو

$$m_p = m_p \therefore \quad m_s = m_s \therefore$$


$$\boxed{0 = \sigma} \Leftarrow 1 + r = 0 = \sigma_c \Leftarrow r + \sigma = 1 - \sigma_c \therefore$$

$$\boxed{r=0} \Leftarrow 7 = r + 0 \Leftarrow 1 + 0 = r + 0 \Leftarrow 1 + 5 = r + 0 \Leftarrow 95 = 50 \therefore$$



مثال ٤ :- من الشكل المقابل :-

أوجد قيم u و v من المعادلة

الحل :- $\because \overline{AP} \parallel \overline{SB} \parallel \overline{HQ}$

$$\therefore \frac{SP}{SB} = \frac{SQ}{SB} = \frac{PQ}{SB}$$

$$\frac{2-v}{1+u} = \frac{1}{2} = \frac{2-v}{1-u} \iff$$

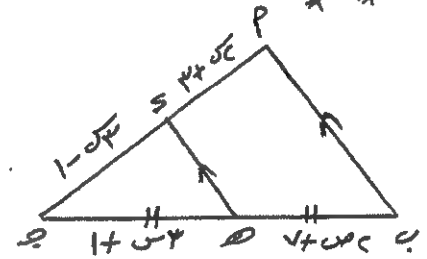
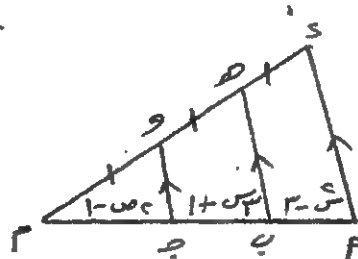
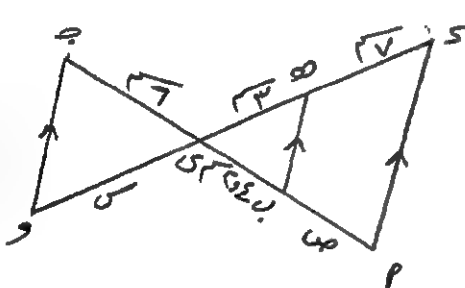
$$1+u=1-u \iff \frac{2-v}{1+u} = \frac{2-v}{1-u} \iff$$

$$\therefore 2-v=2-v \iff 1+u=1-u \iff \boxed{u=0}$$

$$\therefore \frac{2-v}{1-u} = \frac{1}{2} \iff \frac{2-v}{1} = \frac{1}{2} \iff 2-v = \frac{1}{2} \iff v = \frac{3}{2}$$

$$\therefore \boxed{v = \frac{3}{2}}$$

* * * * *
من كل هذه الاشكال الآتية أوجد قيم u و v من المعادلة :-



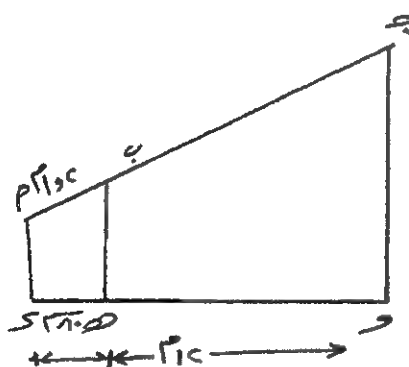
مثال ٥ :- من الشكل المقابل :-

س، هـ، و مسقط P ، ب، ج على الأفق بنفس البعد

$$AB = 2 \text{ و } AC = 3 \text{ و } HD = 28$$

أوجد طول AP جـ الأقرب

الحل :- \because س، هـ، و مسقط P ، ب، ج

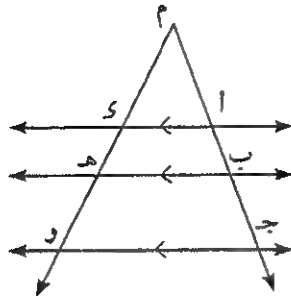


$$\therefore \overline{AP} \parallel \overline{SB} \iff \frac{SP}{SB} = \frac{AP}{SB} \iff \frac{2}{28} = \frac{AP}{3} \iff$$

$$\therefore AP = \frac{2 \times 3}{28} = \frac{6}{28} = \frac{3}{14}$$

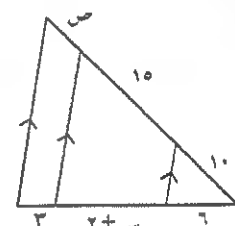
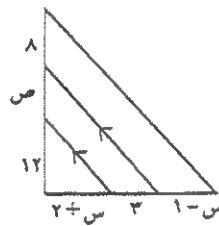
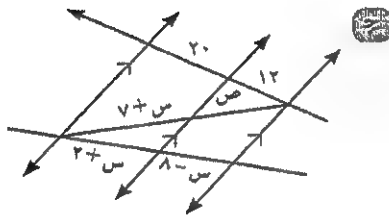
تماديد على "نظرية تاليس"

١٥) اكتب ما تساويه كل من النسب التالية مستخدماً الشكل المقابل:



$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$	$\frac{a}{b} = \frac{e}{f}$
$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$	$\frac{a}{e} = \frac{b}{f}$
$\frac{a}{e} = \frac{b}{f}$	$\frac{c}{e} = \frac{d}{f}$
$\frac{a}{f} = \frac{b}{e}$	$\frac{c}{f} = \frac{d}{e}$

١٦) في كل من الأشكال التالية، احسب قيم س، ص العددية (الأطوال مقدرة بالسنتيمترات)

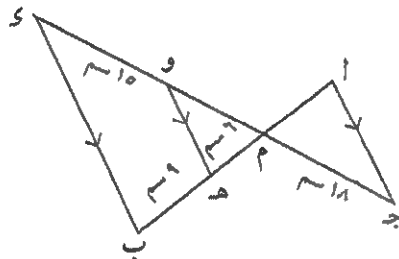


١٧) في الشكل المقابل:

$\overline{AB} \cap \overline{CD} = \{M\}$ ، $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ،
 $\overline{AM} \parallel \overline{CM}$ ، $\overline{BM} \parallel \overline{DM}$

أوجد:

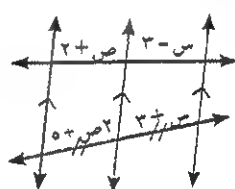
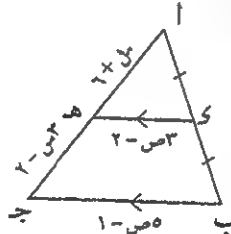
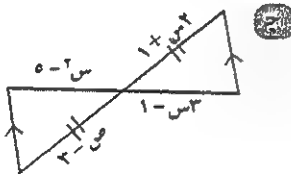
طول \overline{AM}
 طول \overline{CM}



١٨) $\overline{AB} \cap \overline{CD} = \{M\}$ ، $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ، $\overline{AM} \parallel \overline{CM}$ ، $\overline{BM} \parallel \overline{DM}$ ، وكان $\overline{AM} \parallel \overline{CM}$ ، $\overline{BM} \parallel \overline{DM}$

أثبت أن: $AM \times CM = BM \times DM$

١٩) في كل من الأشكال التالية، احسب قيم س، ص العددية:



٢٠) ا ب ج د شكل رباعي فيه $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ، تقاطع قطراه في م، نصف \overline{BD} في هـ،

ورسم $\overline{HO} \parallel \overline{BA}$ ، ويقطع \overline{BD} في س، \overline{AC} في ص، \overline{AO} في و.

أثبت أن:

$\frac{1}{4} \overline{AB} = \overline{HO}$
 $\frac{1}{4} \overline{AB} = \overline{HO}$

(٣) مميزات الزوايا والأجزاء المتناسبة

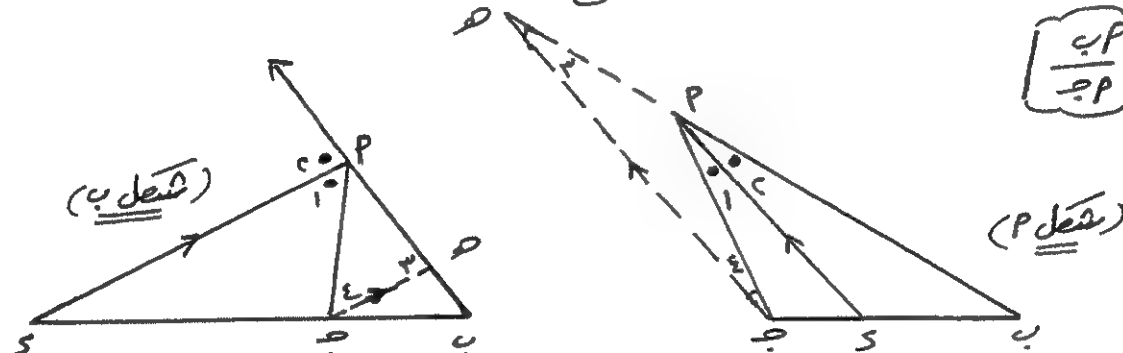
نظرية (٣) :-

إذا نُصِفَت زاوية رأس مثلث أو الزاوية الخارجة للمثلث عندها الرأس
تقسم المُنصفَ ماعدة المثلث عند الداخل أو الخارج إلى جزئين النسبة بين طوليها
تساوي النسبة بين طولي الضلعين الآخرين.

في الشكل المقابل :- P ب ج مثلث

AP ينصف BC ب P (عند الداخل في شكل P ، عند الخارج في شكل B)

$$\therefore \frac{BP}{CP} = \frac{AP}{AS}$$



البرهان :-

$$\therefore AP \text{ ينصف } \angle BAC \therefore \angle 1 = \angle 2$$

$$\therefore \overline{AP} \parallel \overline{SD} \therefore \angle 1 = \angle 3 \text{ (بالتبادل) } \angle 2 = \angle 4 \text{ (بالتقاطع)}$$

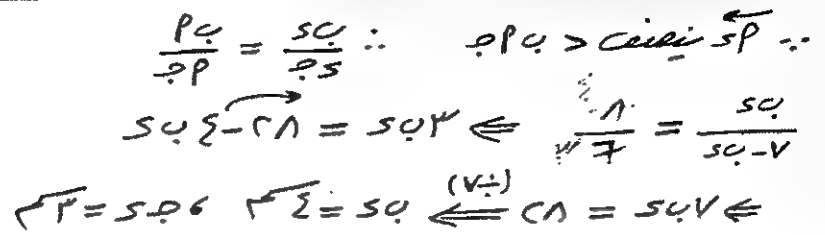
$$\therefore \angle 1 = \angle 2 \therefore \angle 3 = \angle 4 \therefore \overline{AP} \parallel \overline{SD} \therefore \angle 1 = \angle 2$$

$$\therefore \frac{BP}{CP} = \frac{AP}{AS} \text{ (ب) } \therefore \frac{BP}{CP} = \frac{AP}{AS}$$

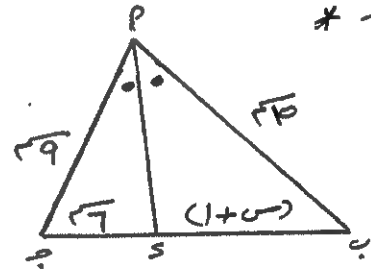
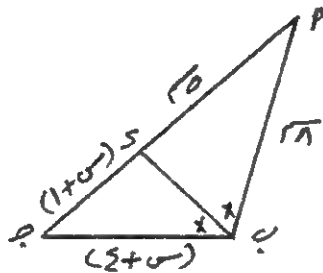
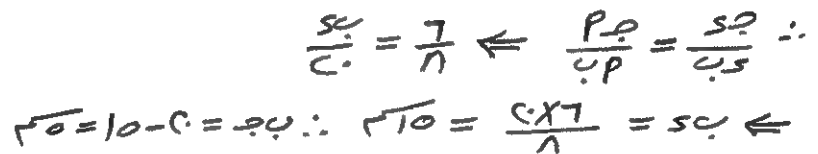
$$\# \frac{BP}{CP} = \frac{AP}{AS} \text{ ينفع أن } (1) \text{ و } (2) \therefore \frac{BP}{CP} = \frac{AP}{AS}$$

مثال (١) :- AP ب ج مثلث فيه $AP = 4$ ، $BP = 6$ ، $CP = 9$ ، رسم AK ينصف $\angle A$
 $\angle B$ و AP و AK في S أو جد طول كل من AS و BS
الحل :-

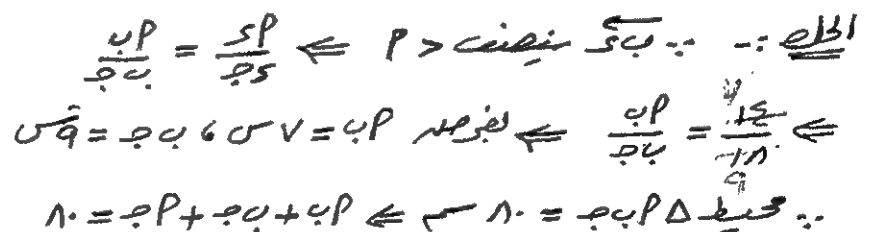
الابداع في الرياضيات



الحل :- $\therefore P \rightarrow \text{نصف}$ $P > P$ الخارجية



5 ج = 18 ازا کاں محیط 5 پ = 30 اوچد طول کل منہ 6 ج = 6 پ

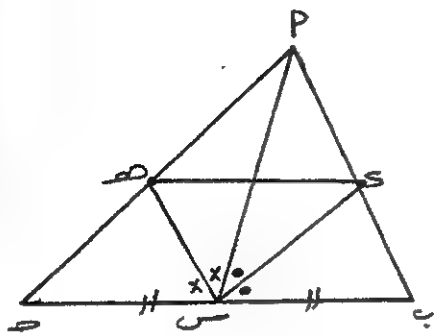


$$r = \frac{\Sigma \Delta}{17} = 0 \leftarrow \Sigma \Delta = 017 \leftarrow n = r_c + 09 + 0v$$

$$\# \sqrt{cv} = r \times 9 = 00 \quad \& \quad \sqrt{r1} = r \times v = 0p \therefore$$

الابداع في الرياضيات

الکلمہ :- مضامین Δ و P سے ہے



(1) $\leftarrow \frac{SP}{OS} = \frac{SP}{OS} \therefore \frac{SP}{OS} > \frac{SP}{OS} \therefore$

• ض ۵۲۵ ج ۱ : سہ نصف داس ج

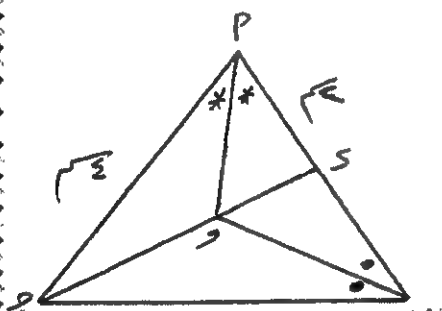
(c) $\rightarrow \frac{dp}{dt} = \frac{dp}{dt} \therefore$

حصہ (۱) ، (۲) مع العلم ان سبب = سبب

$$\# \overline{su} // \overline{su} :: \frac{\partial p}{\partial s} = \frac{sp}{s} ::$$

مثالی ۵ :- در شکل مقابل :-

اُرجد طول بے



الطه: آ و نین د پ ج م ب و نین د ا ب ج

∴ دو نقطه تقاطع منصفان PA و PB

$$\frac{dp}{ds} = \frac{sp}{ps} \therefore \text{جواب} > \text{نصف } sp \therefore$$

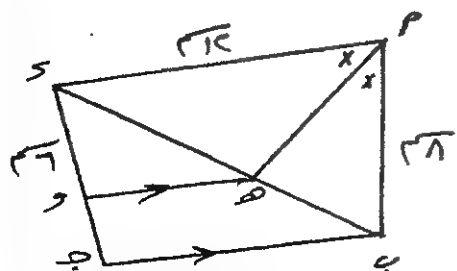
$$\cdot \sqrt{\varepsilon} = \frac{1 \times c}{\varepsilon} = 0.5 \Leftrightarrow \frac{\varepsilon}{1} = \frac{c}{0.5} \Leftrightarrow$$

منه على قلة :-
منه من زوايا المثلث تقاطع
جميعاً في نقطة واحدة

* * * تدريب * * *
 P_{11} بج مثلث قائم الزاوية ضرب $\frac{1}{2}$ سم AP ينصف AD ويقطع BE في F
 إذا كان طول $BE = 2$ سم $AB : AP = 3 : 5$ فأوجد محيط APD ج

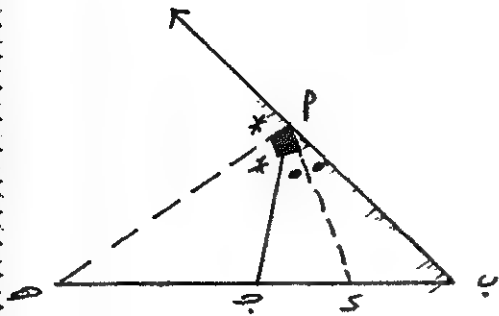
(د) خرابى الشغل المقابل :-

أَوْجِدْ طُولَ كَبَّ .



رسم "ملاحظات هامة"

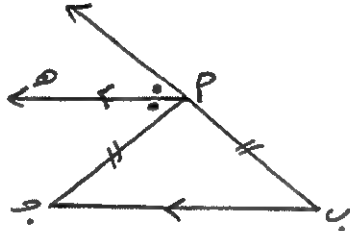
① في الشكل المقابل :- إذا كان P ، P ينصف الزاوية P والزاوية الخارجة للمثلث عند P على الترتيب فإنه :-



$$\frac{BP}{PC} = \frac{BP}{PC} \quad \text{و} \quad \frac{BP}{PC} = \frac{BP}{PC} \quad \therefore \frac{BP}{PC} = \frac{BP}{PC}$$

:- القاعدة بقدر تنقسم من الداخل في P ومن الخارج في P بنفس النسبة $(BP:PC)$

وبملاحظة أنه :- المنصفين الداخل والخارج P ، P متعامدان أي 90°



② في الشكل المقابل :- إذا كان P ينصف الزاوية الخارجة

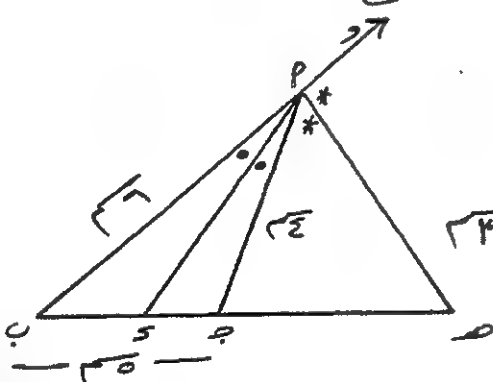
للمثلث P عند P حيث P وكان $P = BP$

فإنه $P \parallel BC$

أي أنه المنصف الخارج للزاوية رأس مثلث متساوي الساقين يكونه موازياً للقاعدة

مثال ① :- P BP مثلث فيه $P = BP$ ، $P = PC$ ، $P = BC$ ، رسم P ينصف P

وتقطع P في P ورسم P ينصف P الخارجة وتقطع P في P P P



الكل :- P ينصف P P P

$$\frac{P}{P} = \frac{P}{P} \Leftrightarrow \frac{P}{P} = \frac{P}{P}$$

$$P = P \Leftrightarrow P = P \Leftrightarrow P = P$$

$$P = P = P$$

P ينصف P الخارجة

$$\frac{P}{P} = \frac{P}{P} \Leftrightarrow \frac{P}{P} = \frac{P}{P}$$

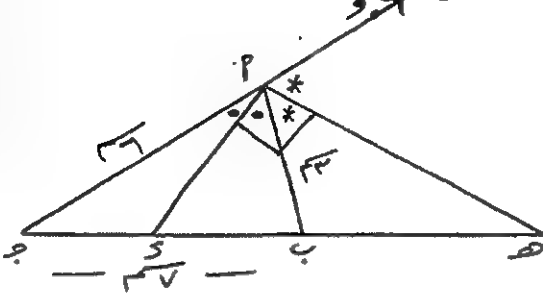
$$P = P$$

$$P = P = P = P$$

مكتبة وسام
شوقين شارع حسني مبارك خلف الثانوية بنات
01004423597.3943035

مثال ٧: $\therefore P$ ب ج مثلث فيه $P = 60^\circ$ ، $B = 70^\circ$ ، $C = 50^\circ$. رسم P كـ نصف $P >$

ويقطع ب ج في S ورسم P كـ نصف $P >$ الخارج ويقطع ب ج في T .



(١) اثبت أن P ب متوسط ST P ج هـ

(٢) أوجد النسبة بين مساحه SPS و مساحه PTD P ج هـ

الحل: $\therefore P$ كـ نصف $P >$

$$\frac{PS}{ST} = \frac{PS}{ST} \iff \frac{PS}{ST} = \frac{PS}{ST} \iff \frac{PS}{ST} = \frac{PS}{ST}$$

$$\frac{PS}{ST} = \frac{PS}{ST} \iff \frac{PS}{ST} = \frac{PS}{ST} \iff \frac{PS}{ST} = \frac{PS}{ST}$$

$$\therefore \frac{PS}{ST} = \frac{PS}{ST} \iff \frac{PS}{ST} = \frac{PS}{ST} \iff \frac{PS}{ST} = \frac{PS}{ST}$$

$$\therefore \frac{PS}{ST} = \frac{PS}{ST} \iff \frac{PS}{ST} = \frac{PS}{ST} \iff \frac{PS}{ST} = \frac{PS}{ST}$$

$$\iff \frac{PS}{ST} = \frac{PS}{ST} \iff \frac{PS}{ST} = \frac{PS}{ST} \iff \frac{PS}{ST} = \frac{PS}{ST}$$

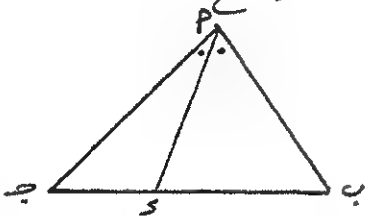
$$\therefore \frac{PS}{ST} = \frac{PS}{ST} \iff \frac{PS}{ST} = \frac{PS}{ST} \iff \frac{PS}{ST} = \frac{PS}{ST}$$

$$\therefore \frac{PS}{ST} = \frac{PS}{ST} \iff \frac{PS}{ST} = \frac{PS}{ST} \iff \frac{PS}{ST} = \frac{PS}{ST}$$

إيجاد طول المنصف الداخلي والمنصف الخارج من زاوية رأس مثلث:

قوله مشهور:

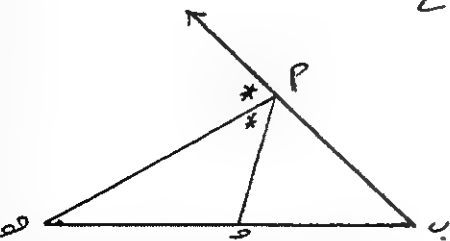
إذا كان P كـ نصف $P >$ من P ج هـ الداخل ويقطع ب ج في S



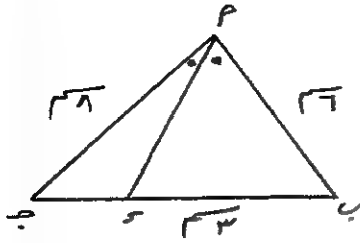
$$PS = \frac{AB \times AC}{AB + AC} = \frac{AB \times AC}{AB + AC}$$

هـ "ملاحظة": إذا كان P كـ نصف $P >$ من P ج هـ الخارج ويقطع ب ج في T

$$PT = \frac{AB \times AC}{AB - AC} = \frac{AB \times AC}{AB - AC}$$



جميل غالي السيد



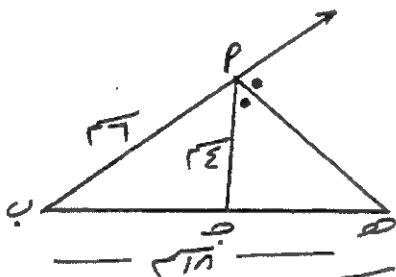
مثال ٨ :- في الشكل المقابل :-

أوجد طول AP

الحل :- $AP > BP$.. $AP > PC$

$$\therefore \frac{AP}{BP} = \frac{AC}{BC} \Leftarrow \frac{7}{8} = \frac{AP}{3} \Leftarrow AP = \frac{8 \times 3}{7} = \frac{24}{7}$$

$$\therefore AP = \sqrt{36} = \sqrt{16 - 2 \times 8 \times 6} = \sqrt{2 \times 3 - 8 \times 6} = \sqrt{6 \times 3 - 8 \times 6} = 3P \therefore$$



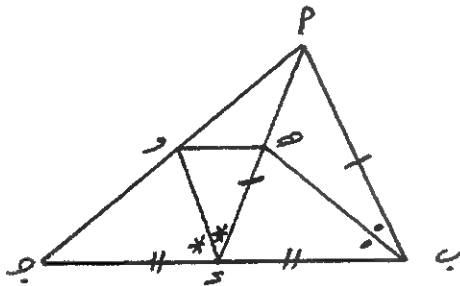
مثال ٩ :- في الشكل المقابل :-

أوجد طول AP

الحل :- $AP > BP$.. $AP > PC$

$$\therefore \frac{AP}{BP} = \frac{AC}{BC} \Leftarrow \frac{7}{12} = \frac{AP}{10} \Leftarrow \frac{AP}{BP} = \frac{AC}{BC} \therefore$$

$$\therefore AP = \sqrt{196} = \sqrt{7 \times 2 - 12 \times 10} = \sqrt{AP \times PC - BP \times BP} = BP \therefore$$



مثال ١٠ :- في الشكل المقابل :-

اثبت أنه $AP \parallel BC$

الحل :- $BP > PC$.. $BP > PC$

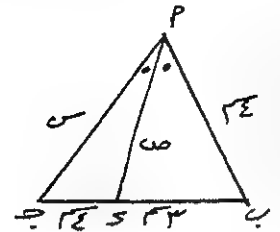
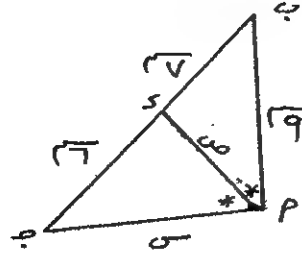
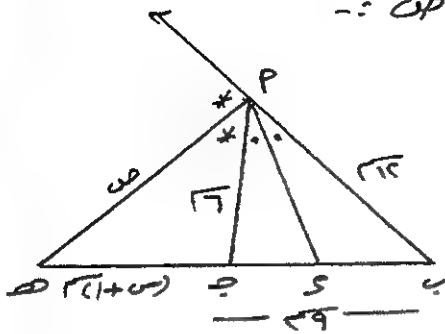
$$\therefore \frac{AP}{BP} = \frac{AC}{BC} \Leftarrow (1)$$

$$\therefore \frac{AP}{BP} = \frac{AC}{BC} \Leftarrow (2)$$

$$\therefore \frac{AP}{BP} = \frac{AC}{BC} \Leftarrow (1) \Leftarrow (2) \Leftarrow \frac{AP}{BP} = \frac{AC}{BC}$$

$$\therefore \frac{AP}{BP} = \frac{AC}{BC} \Leftarrow \frac{AP}{BP} = \frac{AC}{BC} \Leftarrow \frac{AP}{BP} = \frac{AC}{BC}$$

* تدوين * من كل من الاشكال الآتية أوجد قيمة OP :-



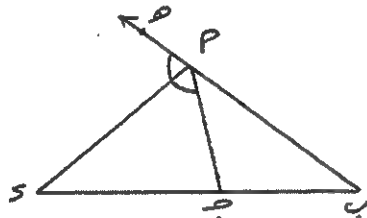
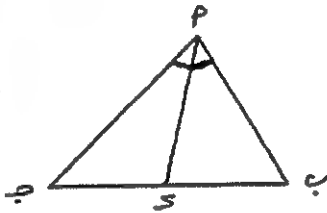
عكس نظرية (٣) :- من الشكل المقابل :-

• إذا كانت S و P ب.ج (شكل ١) بحيث $\frac{PS}{SP} = \frac{BS}{BP}$

∴ P هي منتصف BP ج

• إذا كانت S و P ب.ج S و P ب.ج (شكل ٢)

بحيث $\frac{PS}{SP} = \frac{BS}{BP}$ ∴ P هي منتصف BP ج



مثال (١١) :- من الشكل المقابل :- تكون P و S

انتم أنتم ب.ج و P و S ب.ج

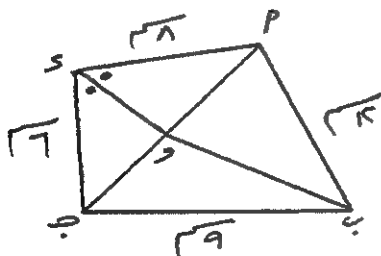
الحل :- من ΔSP ج

∴ تكون P و S ب.ج ∴ $\frac{SP}{SP} = \frac{BP}{BP}$

∴ $\frac{13}{7} = \frac{BP}{7} \leftarrow (١)$

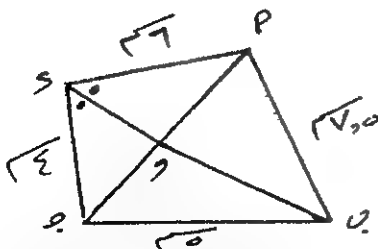
من ΔBP ج ∴ $\frac{13}{9} = \frac{BP}{BP} \leftarrow (٢)$

من (١) و (٢) يتبع أن $\frac{BP}{BP} = \frac{BP}{BP}$ ∴ P و S ب.ج #



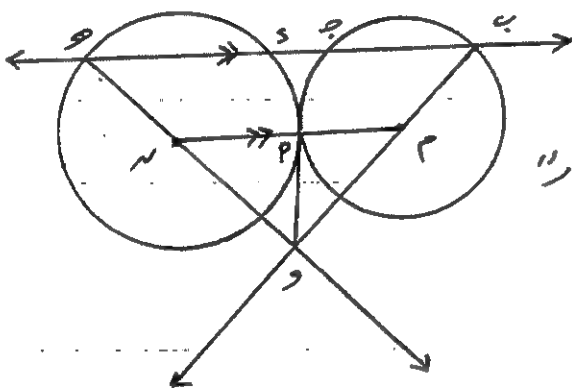
* تدوين * من الشكل المقابل :- تكون P و S

انتم أنتم ب.ج و P و S ب.ج



* تدرسي *
* *
أبجد شكل رأس فيه $AP = AN$ ، $AB = AC$ ، AD هي خطية
من P إلى BC . رسم هو AD يقطع BC في D . أثبت أنه يكون $AD \perp BC$.

مثال (١٤) :- دائرة M ، دائرة N خارج P . رسم مستقيم يوازي MN
يقطع الدائرة M في B ، C والدائرة N في A ، D على الترتيب . فإذا تقاطع
بنم ، AD من النقطة P : أثبت أنه $AD \perp BC$.



الحل :- $AD \perp BC$

$$(1) \leftarrow \frac{AN}{ND} = \frac{PM}{MD}$$

∴ $AN = PM$ ، $ND = MD$ "أضلاع متطابقة"

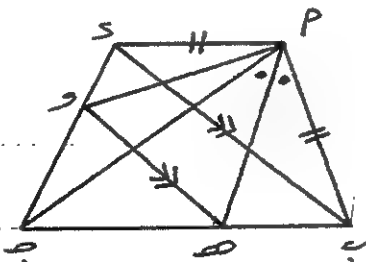
$$\frac{AN}{ND} = \frac{PM}{MD} \leftarrow \frac{AN}{ND} = \frac{PM}{MD} \leftarrow (1)$$

∴ $AD \perp BC$ و P منتصف BC .

مثال (١٥) :- من الشكل المقابل :-

أثبت أنه $AD \perp BC$.

الحل :- ∴ $AD \perp BC$ و P منتصف BC .



$$(1) \leftarrow \frac{AP}{PB} = \frac{CP}{PC}$$

$$(2) \leftarrow \frac{AP}{PB} = \frac{CP}{PC} \leftarrow \frac{AP}{PB} = \frac{CP}{PC}$$

$$AP = PC \leftarrow \frac{AP}{PB} = \frac{CP}{PC} \leftarrow (1) \text{ و } (2)$$

$$\frac{AP}{PB} = \frac{CP}{PC} \leftarrow \frac{AP}{PB} = \frac{CP}{PC} \leftarrow \frac{AP}{PB} = \frac{CP}{PC}$$

تمارين على منصف الزوايا والجزء المتناسب

١ في الشكل المقابل: \overline{AO} ينصف Δ . أكمل:

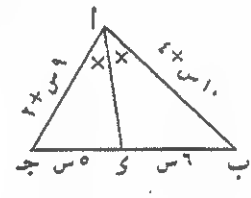
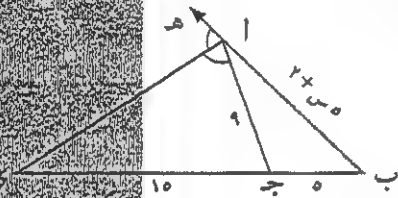
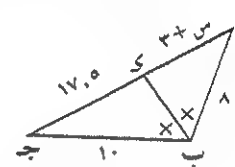
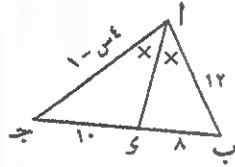
$\frac{AO}{BO} = \frac{AO}{CO}$

$\frac{BO}{CO} = \frac{AO}{AO}$

$\frac{BO}{CO} = \frac{AO}{AO}$

$\frac{BO}{CO} = \frac{AO}{AO}$

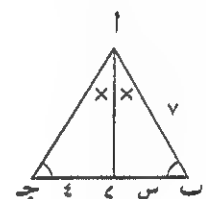
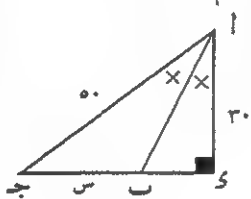
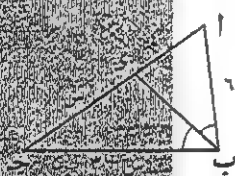
٢ في كل من الأشكال التالية، أوجد قيمة s (الخطوط المقطرة بالتوازي)



٣ ا ب ج مثلث محيطه ٢٧ سم، رسم \overline{BO} ينصف Δ ب و يقطع \overline{AC} في O .

إذا كان $AO = ٤$ سم، $BO = ٥$ سم، أوجد طول كل من AB ، BC ، AC

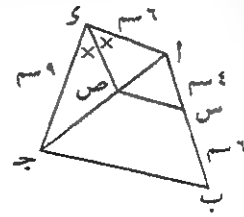
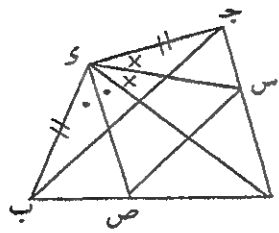
٤ في كل من الأشكال التالية أوجد قيمة s ، ثم أوجد محيط ΔABC



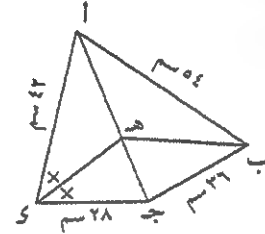
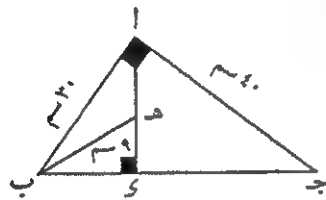
٥ ا ب ج مثلث فيه $AB = ٨$ سم، $AC = ٤$ سم، $BC = ٦$ سم، رسم \overline{AO} ينصف Δ او يقطع \overline{BC} في O ورسم

\overline{AH} ينصف Δ الخارجة ويقطع \overline{BC} في H أوجد طول كل من AO ، HO ، AO ، HO

٦ في كل من الأشكال التالية: أثبت أن $\overline{س} \parallel \overline{ب ج}$



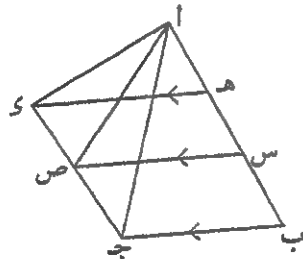
٧ في كل من الأشكال التالية: أثبت أن $\overline{ب ه}$ ينصف Δ $أ ب ج$



٨ في الشكل المقابل: $\overline{ه د} \parallel \overline{س} \parallel \overline{ب ج}$

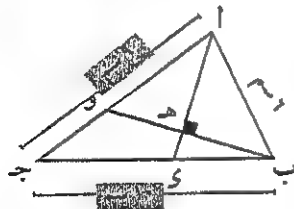
$$أ س \times ب س = أ ج \times ه س$$

أثبت أن $\overline{أ ه}$ ينصف Δ $أ ب ج$.



٩ أ ب ج مثلث $\exists \overline{ب ج} \perp \overline{ه د}$ ، $\overline{ه د} \parallel \overline{ب ج}$ حيث $ج د = أ ب$. رسم $\overline{ج ه} \parallel \overline{أ ه}$ ويقطع $\overline{أ ب}$ في ه، ورسم

$\overline{ه و} \parallel \overline{ب ج}$ ويقطع $\overline{أ ج}$ في و أثبت أن $\overline{ب و}$ ينصف Δ $أ ب ج$



١٠ في الشكل المقابل: أ ب ج مثلث فيه $أ ب = ٦$ سم، $أ ج = ٩$ سم،

$$ب ج = ١٠$$
 سم. $\exists \overline{ب ج} \perp \overline{ه د}$ حيث $ب د = ٤$ سم.

رسم $\overline{ب ه} \perp \overline{أ و}$ ويقطع $\overline{أ و}$ في ه، وعلى الترتيب.

أثبت أن $\overline{أ و}$ ينصف Δ $أ ب ج$.

أوجد م (Δ $أ ب و$) : م (Δ $ج ب و$)

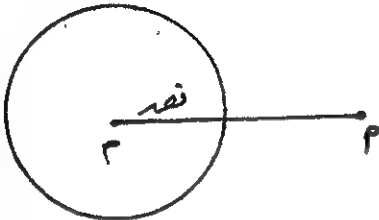
دعنا نطبيقات تناسب في الدائرة

أولاً :- قوة نقطة بالنسبة لدائرة :-

تعريف :- قوة النقطة P بالنسبة للدائرة M التي طول نصف قطرها r هو العدد

$$\text{الحقيق} \quad \text{قوة } (P) \quad \text{حيث} \quad \text{قوة } (P) = (r^2 - MP^2)$$

حيث r ملاحظة هامة :-



يملكه المركز بموقع نقطة P بالنسبة لدائرة M

- فإذا كان :-
- $\text{قوة } (P) < 0$: فإنه P تقع خارج الدائرة .
 - $\text{قوة } (P) = 0$: فإنه P تقع على الدائرة .
 - $\text{قوة } (P) > 0$: فإنه P تقع داخل الدائرة .

مثال ① :- حدد موقع كل من النقاط P, B, C بالنسبة للدائرة M التي طول نصف قطرها

كما تم اكتب بعد كل نقطة عن مركز الدائرة في الحالات التالية :-

$$(1) \quad \text{قوة } (P) = 9 \quad (2) \quad \text{قوة } (B) = \text{صفر} \quad (3) \quad \text{قوة } (C) = -7$$

الحل :-

$$(1) \quad \text{قوة } (P) = 9 < 0 \quad \therefore P \text{ تقع خارج الدائرة .}$$

$$\therefore \text{قوة } (P) = (r^2 - MP^2) = 9 \iff 16 - (MP)^2 = 9 \iff (MP)^2 = 7 \iff MP = \sqrt{7}$$

$$(2) \quad \text{قوة } (B) = 0 \quad \therefore B \text{ تقع على الدائرة .}$$

$$\therefore B = M \quad \therefore MB = 0$$

$$(3) \quad \text{قوة } (C) = -7 < 0 \quad \therefore C \text{ تقع داخل الدائرة .}$$

$$\therefore \text{قوة } (C) = (r^2 - MC^2) = -7 \iff 16 - (MC)^2 = -7 \iff (MC)^2 = 23 \iff MC = \sqrt{23}$$

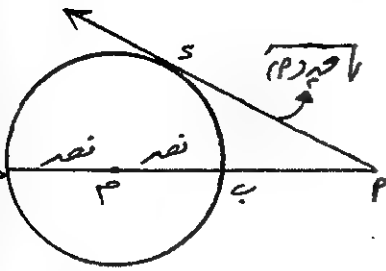
* تدريبات * حدد موقع كل من النقاط P, B, C بالنسبة للدائرة M التي طول نصف قطرها r

* ثم اكتب بعد كل نقطة عن مركز الدائرة في الحالات التالية :-

$$(1) \quad \text{قوة } (P) = 10 \quad (2) \quad \text{قوة } (B) = \text{صفر} \quad (3) \quad \text{قوة } (C) = -2$$

في "ملاحظة هامة" :-

① إذا وقعت النقطة P خارج الدائرة M فإنه :-



$$PM^2 - (MA)^2 = PM^2 - (MB)^2 \Rightarrow (PA + MB)(PA - MB) = (PM)^2 - (MA)^2$$

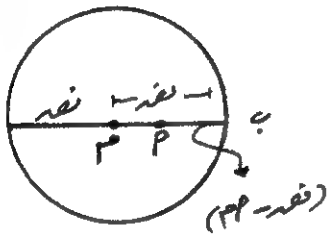
$$(PA + MB)(PA - MB) = (PM)^2 - (MA)^2$$

$$(PA + MB)(PA - MB) = (PM)^2 - (MA)^2$$

$$(PA + MB)(PA - MB) = (PM)^2 - (MA)^2$$

∴ طول المحاس المرسوم من النقطة P للدائرة M = $\sqrt{PM^2 - (MA)^2}$

② إذا وقعت النقطة P داخل الدائرة M فإنه :-



$$PM^2 - (MA)^2 = PM^2 - (MB)^2 \Rightarrow (PA + MB)(PA - MB) = (PM)^2 - (MA)^2$$

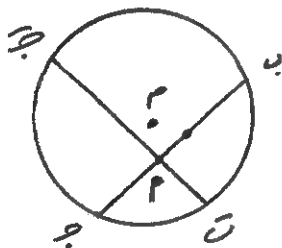
$$(PA + MB)(PA - MB) = (PM)^2 - (MA)^2$$

$$(PA + MB)(PA - MB) = (PM)^2 - (MA)^2$$

$$(PA + MB)(PA - MB) = (PM)^2 - (MA)^2$$

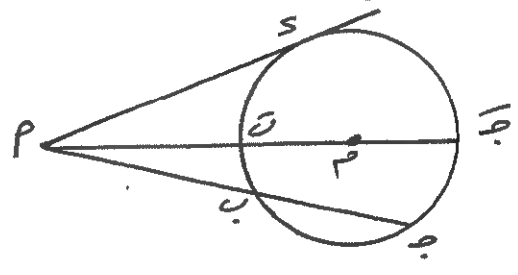
⊗ "وصيغة عامة"

(أ) P داخل الدائرة M



$$PA \cdot PB = PC \cdot PD = PM^2 - (MA)^2$$

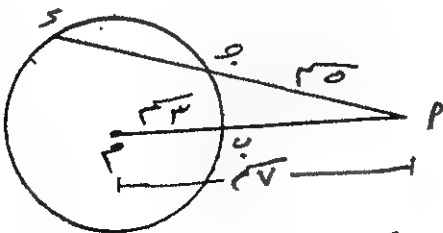
(ب) P خارج الدائرة M



$$PA \cdot PB = PC \cdot PD = PS^2 = PM^2 - (MA)^2$$

مثال ⑤ دائرة مركزها M وطول نصف قطرها 5 سم ، P تبعد عن مركزها 13 سم . رسم من P

مستقيم يقطع الدائرة خارجي ، S بحيث $P \in AS$ فإذا كان $PA = 8$ سم أوجد طول الوتر AB



$$PM^2 - (MA)^2 = PS^2 \Rightarrow 13^2 - 5^2 = PS^2$$

$$\therefore PM^2 - (MA)^2 = PS^2 \Rightarrow 13^2 - 5^2 = PS^2$$

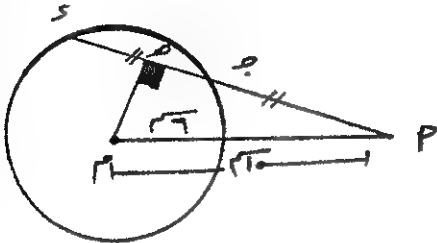
$$\therefore PM^2 - (MA)^2 = PS^2 \Rightarrow 13^2 - 5^2 = PS^2$$

$$\therefore PM^2 - (MA)^2 = PS^2 \Rightarrow 13^2 - 5^2 = PS^2$$

مثال ٣ :- الدائرة M طول نصف قطرها ٦٠ ، النقطة P تبعد عن مركزها ١٠٠ . رسم

مستقيم يمر بالنقطة P ويقطع الدائرة من النقطتين S ، C حيث $SP = ٦٠$.

أوجد طول SC وبعد مركز الدائرة .



الحل :- نفرض $PM = ١٠٠$ ، $MP = ٦٠$.

$\therefore P$ تقع خارج الدائرة .

$$\therefore PM^2 = (MP)^2 - (SP)^2 = 100^2 - 60^2 = 8000 = 80 \times 100$$

$$\therefore 80 = SC \times PC = (SC) \times (SC + 60) \Rightarrow SC^2 + 60SC - 80 = 0$$

بفرضه أنه بعد الوتر SC عن مركز الدائرة M حيث $MC \perp SC$

$$\text{فيكون } MC = \frac{SC}{2} = 40 = MC \Rightarrow SC = 80$$

$$\therefore PM = MC + CP = 40 + 60 = 100$$

$$\text{من } \Delta PMS \text{ القائم في } M \Rightarrow (PM)^2 = (MS)^2 + (SP)^2$$

$$\Rightarrow (100)^2 = (MS)^2 + 60^2 \Rightarrow MS^2 = 8000 \Rightarrow MS = 80 \Rightarrow SC = 80$$

* * * تدريب * الدائرة N طول نصف قطرها ٨٠ . النقطة B تبعد عن مركزها ١٢٠ .

رسم مستقيم يمر بالنقطة B ويقطع الدائرة من النقطتين D ، E حيث $BD = ٨٠$

أوجد طول الوتر DE وبعد مركز الدائرة N .

مثال ٤ :- دائرة M ، نصف قطرها ٦٠ . P ، Q ، R ، S ، T ، U ، V ، W ، X ، Y ، Z . رسم

نقطع الدائرة M من S ، C حيث $SC = ٨٠$ ، $SP = ٦٠$ ، $SM = ١٠٠$ ، $SN = ١٢٠$ ، $SO = ١٤٠$ ، $SP = ١٦٠$ ، $SN = ١٨٠$ ، $SO = ٢٠٠$ ، $SP = ٢٢٠$ ، $SN = ٢٤٠$ ، $SO = ٢٦٠$ ، $SP = ٢٨٠$ ، $SN = ٣٠٠$ ، $SO = ٣٢٠$ ، $SP = ٣٤٠$ ، $SN = ٣٦٠$ ، $SO = ٣٨٠$ ، $SP = ٤٠٠$ ، $SN = ٤٢٠$ ، $SO = ٤٤٠$ ، $SP = ٤٦٠$ ، $SN = ٤٨٠$ ، $SO = ٥٠٠$ ، $SP = ٥٢٠$ ، $SN = ٥٤٠$ ، $SO = ٥٦٠$ ، $SP = ٥٨٠$ ، $SN = ٦٠٠$ ، $SO = ٦٢٠$ ، $SP = ٦٤٠$ ، $SN = ٦٦٠$ ، $SO = ٦٨٠$ ، $SP = ٧٠٠$ ، $SN = ٧٢٠$ ، $SO = ٧٤٠$ ، $SP = ٧٦٠$ ، $SN = ٧٨٠$ ، $SO = ٨٠٠$ ، $SP = ٨٢٠$ ، $SN = ٨٤٠$ ، $SO = ٨٦٠$ ، $SP = ٨٨٠$ ، $SN = ٩٠٠$ ، $SO = ٩٢٠$ ، $SP = ٩٤٠$ ، $SN = ٩٦٠$ ، $SO = ٩٨٠$ ، $SP = ١٠٠٠$ ، $SN = ١٠٢٠$ ، $SO = ١٠٤٠$ ، $SP = ١٠٦٠$ ، $SN = ١٠٨٠$ ، $SO = ١١٠٠$ ، $SP = ١١٢٠$ ، $SN = ١١٤٠$ ، $SO = ١١٦٠$ ، $SP = ١١٨٠$ ، $SN = ١٢٠٠$ ، $SO = ١٢٢٠$ ، $SP = ١٢٤٠$ ، $SN = ١٢٦٠$ ، $SO = ١٢٨٠$ ، $SP = ١٣٠٠$ ، $SN = ١٣٢٠$ ، $SO = ١٣٤٠$ ، $SP = ١٣٦٠$ ، $SN = ١٣٨٠$ ، $SO = ١٤٠٠$ ، $SP = ١٤٢٠$ ، $SN = ١٤٤٠$ ، $SO = ١٤٦٠$ ، $SP = ١٤٨٠$ ، $SN = ١٥٠٠$ ، $SO = ١٥٢٠$ ، $SP = ١٥٤٠$ ، $SN = ١٥٦٠$ ، $SO = ١٥٨٠$ ، $SP = ١٦٠٠$ ، $SN = ١٦٢٠$ ، $SO = ١٦٤٠$ ، $SP = ١٦٦٠$ ، $SN = ١٦٨٠$ ، $SO = ١٧٠٠$ ، $SP = ١٧٢٠$ ، $SN = ١٧٤٠$ ، $SO = ١٧٦٠$ ، $SP = ١٧٨٠$ ، $SN = ١٨٠٠$ ، $SO = ١٨٢٠$ ، $SP = ١٨٤٠$ ، $SN = ١٨٦٠$ ، $SO = ١٨٨٠$ ، $SP = ١٩٠٠$ ، $SN = ١٩٢٠$ ، $SO = ١٩٤٠$ ، $SP = ١٩٦٠$ ، $SN = ١٩٨٠$ ، $SO = ٢٠٠٠$ ، $SP = ٢٠٢٠$ ، $SN = ٢٠٤٠$ ، $SO = ٢٠٦٠$ ، $SP = ٢٠٨٠$ ، $SN = ٢١٠٠$ ، $SO = ٢١٢٠$ ، $SP = ٢١٤٠$ ، $SN = ٢١٦٠$ ، $SO = ٢١٨٠$ ، $SP = ٢٢٠٠$ ، $SN = ٢٢٢٠$ ، $SO = ٢٢٤٠$ ، $SP = ٢٢٦٠$ ، $SN = ٢٢٨٠$ ، $SO = ٢٣٠٠$ ، $SP = ٢٣٢٠$ ، $SN = ٢٣٤٠$ ، $SO = ٢٣٦٠$ ، $SP = ٢٣٨٠$ ، $SN = ٢٤٠٠$ ، $SO = ٢٤٢٠$ ، $SP = ٢٤٤٠$ ، $SN = ٢٤٦٠$ ، $SO = ٢٤٨٠$ ، $SP = ٢٥٠٠$ ، $SN = ٢٥٢٠$ ، $SO = ٢٥٤٠$ ، $SP = ٢٥٦٠$ ، $SN = ٢٥٨٠$ ، $SO = ٢٦٠٠$ ، $SP = ٢٦٢٠$ ، $SN = ٢٦٤٠$ ، $SO = ٢٦٦٠$ ، $SP = ٢٦٨٠$ ، $SN = ٢٧٠٠$ ، $SO = ٢٧٢٠$ ، $SP = ٢٧٤٠$ ، $SN = ٢٧٦٠$ ، $SO = ٢٧٨٠$ ، $SP = ٢٨٠٠$ ، $SN = ٢٨٢٠$ ، $SO = ٢٨٤٠$ ، $SP = ٢٨٦٠$ ، $SN = ٢٨٨٠$ ، $SO = ٢٩٠٠$ ، $SP = ٢٩٢٠$ ، $SN = ٢٩٤٠$ ، $SO = ٢٩٦٠$ ، $SP = ٢٩٨٠$ ، $SN = ٣٠٠٠$ ، $SO = ٣٠٢٠$ ، $SP = ٣٠٤٠$ ، $SN = ٣٠٦٠$ ، $SO = ٣٠٨٠$ ، $SP = ٣١٠٠$ ، $SN = ٣١٢٠$ ، $SO = ٣١٤٠$ ، $SP = ٣١٦٠$ ، $SN = ٣١٨٠$ ، $SO = ٣٢٠٠$ ، $SP = ٣٢٢٠$ ، $SN = ٣٢٤٠$ ، $SO = ٣٢٦٠$ ، $SP = ٣٢٨٠$ ، $SN = ٣٣٠٠$ ، $SO = ٣٣٢٠$ ، $SP = ٣٣٤٠$ ، $SN = ٣٣٦٠$ ، $SO = ٣٣٨٠$ ، $SP = ٣٤٠٠$ ، $SN = ٣٤٢٠$ ، $SO = ٣٤٤٠$ ، $SP = ٣٤٦٠$ ، $SN = ٣٤٨٠$ ، $SO = ٣٥٠٠$ ، $SP = ٣٥٢٠$ ، $SN = ٣٥٤٠$ ، $SO = ٣٥٦٠$ ، $SP = ٣٥٨٠$ ، $SN = ٣٦٠٠$ ، $SO = ٣٦٢٠$ ، $SP = ٣٦٤٠$ ، $SN = ٣٦٦٠$ ، $SO = ٣٦٨٠$ ، $SP = ٣٧٠٠$ ، $SN = ٣٧٢٠$ ، $SO = ٣٧٤٠$ ، $SP = ٣٧٦٠$ ، $SN = ٣٧٨٠$ ، $SO = ٣٨٠٠$ ، $SP = ٣٨٢٠$ ، $SN = ٣٨٤٠$ ، $SO = ٣٨٦٠$ ، $SP = ٣٨٨٠$ ، $SN = ٣٩٠٠$ ، $SO = ٣٩٢٠$ ، $SP = ٣٩٤٠$ ، $SN = ٣٩٦٠$ ، $SO = ٣٩٨٠$ ، $SP = ٤٠٠٠$ ، $SN = ٤٠٢٠$ ، $SO = ٤٠٤٠$ ، $SP = ٤٠٦٠$ ، $SN = ٤٠٨٠$ ، $SO = ٤١٠٠$ ، $SP = ٤١٢٠$ ، $SN = ٤١٤٠$ ، $SO = ٤١٦٠$ ، $SP = ٤١٨٠$ ، $SN = ٤٢٠٠$ ، $SO = ٤٢٢٠$ ، $SP = ٤٢٤٠$ ، $SN = ٤٢٦٠$ ، $SO = ٤٢٨٠$ ، $SP = ٤٣٠٠$ ، $SN = ٤٣٢٠$ ، $SO = ٤٣٤٠$ ، $SP = ٤٣٦٠$ ، $SN = ٤٣٨٠$ ، $SO = ٤٤٠٠$ ، $SP = ٤٤٢٠$ ، $SN = ٤٤٤٠$ ، $SO = ٤٤٦٠$ ، $SP = ٤٤٨٠$ ، $SN = ٤٥٠٠$ ، $SO = ٤٥٢٠$ ، $SP = ٤٥٤٠$ ، $SN = ٤٥٦٠$ ، $SO = ٤٥٨٠$ ، $SP = ٤٦٠٠$ ، $SN = ٤٦٢٠$ ، $SO = ٤٦٤٠$ ، $SP = ٤٦٦٠$ ، $SN = ٤٦٨٠$ ، $SO = ٤٧٠٠$ ، $SP = ٤٧٢٠$ ، $SN = ٤٧٤٠$ ، $SO = ٤٧٦٠$ ، $SP = ٤٧٨٠$ ، $SN = ٤٨٠٠$ ، $SO = ٤٨٢٠$ ، $SP = ٤٨٤٠$ ، $SN = ٤٨٦٠$ ، $SO = ٤٨٨٠$ ، $SP = ٤٩٠٠$ ، $SN = ٤٩٢٠$ ، $SO = ٤٩٤٠$ ، $SP = ٤٩٦٠$ ، $SN = ٤٩٨٠$ ، $SO = ٥٠٠٠$ ، $SP = ٥٠٢٠$ ، $SN = ٥٠٤٠$ ، $SO = ٥٠٦٠$ ، $SP = ٥٠٨٠$ ، $SN = ٥١٠٠$ ، $SO = ٥١٢٠$ ، $SP = ٥١٤٠$ ، $SN = ٥١٦٠$ ، $SO = ٥١٨٠$ ، $SP = ٥٢٠٠$ ، $SN = ٥٢٢٠$ ، $SO = ٥٢٤٠$ ، $SP = ٥٢٦٠$ ، $SN = ٥٢٨٠$ ، $SO = ٥٣٠٠$ ، $SP = ٥٣٢٠$ ، $SN = ٥٣٤٠$ ، $SO = ٥٣٦٠$ ، $SP = ٥٣٨٠$ ، $SN = ٥٤٠٠$ ، $SO = ٥٤٢٠$ ، $SP = ٥٤٤٠$ ، $SN = ٥٤٦٠$ ، $SO = ٥٤٨٠$ ، $SP = ٥٥٠٠$ ، $SN = ٥٥٢٠$ ، $SO = ٥٥٤٠$ ، $SP = ٥٥٦٠$ ، $SN = ٥٥٨٠$ ، $SO = ٥٦٠٠$ ، $SP = ٥٦٢٠$ ، $SN = ٥٦٤٠$ ، $SO = ٥٦٦٠$ ، $SP = ٥٦٨٠$ ، $SN = ٥٧٠٠$ ، $SO = ٥٧٢٠$ ، $SP = ٥٧٤٠$ ، $SN = ٥٧٦٠$ ، $SO = ٥٧٨٠$ ، $SP = ٥٨٠٠$ ، $SN = ٥٨٢٠$ ، $SO = ٥٨٤٠$ ، $SP = ٥٨٦٠$ ، $SN = ٥٨٨٠$ ، $SO = ٥٩٠٠$ ، $SP = ٥٩٢٠$ ، $SN = ٥٩٤٠$ ، $SO = ٥٩٦٠$ ، $SP = ٥٩٨٠$ ، $SN = ٦٠٠٠$ ، $SO = ٦٠٢٠$ ، $SP = ٦٠٤٠$ ، $SN = ٦٠٦٠$ ، $SO = ٦٠٨٠$ ، $SP = ٦١٠٠$ ، $SN = ٦١٢٠$ ، $SO = ٦١٤٠$ ، $SP = ٦١٦٠$ ، $SN = ٦١٨٠$ ، $SO = ٦٢٠٠$ ، $SP = ٦٢٢٠$ ، $SN = ٦٢٤٠$ ، $SO = ٦٢٦٠$ ، $SP = ٦٢٨٠$ ، $SN = ٦٣٠٠$ ، $SO = ٦٣٢٠$ ، $SP = ٦٣٤٠$ ، $SN = ٦٣٦٠$ ، $SO = ٦٣٨٠$ ، $SP = ٦٤٠٠$ ، $SN = ٦٤٢٠$ ، $SO = ٦٤٤٠$ ، $SP = ٦٤٦٠$ ، $SN = ٦٤٨٠$ ، $SO = ٦٥٠٠$ ، $SP = ٦٥٢٠$ ، $SN = ٦٥٤٠$ ، $SO = ٦٥٦٠$ ، $SP = ٦٥٨٠$ ، $SN = ٦٦٠٠$ ، $SO = ٦٦٢٠$ ، $SP = ٦٦٤٠$ ، $SN = ٦٦٦٠$ ، $SO = ٦٦٨٠$ ، $SP = ٦٧٠٠$ ، $SN = ٦٧٢٠$ ، $SO = ٦٧٤٠$ ، $SP = ٦٧٦٠$ ، $SN = ٦٧٨٠$ ، $SO = ٦٨٠٠$ ، $SP = ٦٨٢٠$ ، $SN = ٦٨٤٠$ ، $SO = ٦٨٦٠$ ، $SP = ٦٨٨٠$ ، $SN = ٦٩٠٠$ ، $SO = ٦٩٢٠$ ، $SP = ٦٩٤٠$ ، $SN = ٦٩٦٠$ ، $SO = ٦٩٨٠$ ، $SP = ٧٠٠٠$ ، $SN = ٧٠٢٠$ ، $SO = ٧٠٤٠$ ، $SP = ٧٠٦٠$ ، $SN = ٧٠٨٠$ ، $SO = ٧١٠٠$ ، $SP = ٧١٢٠$ ، $SN = ٧١٤٠$ ، $SO = ٧١٦٠$ ، $SP = ٧١٨٠$ ، $SN = ٧٢٠٠$ ، $SO = ٧٢٢٠$ ، $SP = ٧٢٤٠$ ، $SN = ٧٢٦٠$ ، $SO = ٧٢٨٠$ ، $SP = ٧٣٠٠$ ، $SN = ٧٣٢٠$ ، $SO = ٧٣٤٠$ ، $SP = ٧٣٦٠$ ، $SN = ٧٣٨٠$ ، $SO = ٧٤٠٠$ ، $SP = ٧٤٢٠$ ، $SN = ٧٤٤٠$ ، $SO = ٧٤٦٠$ ، $SP = ٧٤٨٠$ ، $SN = ٧٥٠٠$ ، $SO = ٧٥٢٠$ ، $SP = ٧٥٤٠$ ، $SN = ٧٥٦٠$ ، $SO = ٧٥٨٠$ ، $SP = ٧٦٠٠$ ، $SN = ٧٦٢٠$ ، $SO = ٧٦٤٠$ ، $SP = ٧٦٦٠$ ، $SN = ٧٦٨٠$ ، $SO = ٧٧٠٠$ ، $SP = ٧٧٢٠$ ، $SN = ٧٧٤٠$ ، $SO = ٧٧٦٠$ ، $SP = ٧٧٨٠$ ، $SN = ٧٨٠٠$ ، $SO = ٧٨٢٠$ ، $SP = ٧٨٤٠$ ، $SN = ٧٨٦٠$ ، $SO = ٧٨٨٠$ ، $SP = ٧٩٠٠$ ، $SN = ٧٩٢٠$ ، $SO = ٧٩٤٠$ ، $SP = ٧٩٦٠$ ، $SN = ٧٩٨٠$ ، $SO = ٨٠٠٠$ ، $SP = ٨٠٢٠$ ، $SN = ٨٠٤٠$ ، $SO = ٨٠٦٠$ ، $SP = ٨٠٨٠$ ، $SN = ٨١٠٠$ ، $SO = ٨١٢٠$ ، $SP = ٨١٤٠$ ، $SN = ٨١٦٠$ ، $SO = ٨١٨٠$ ، $SP = ٨٢٠٠$ ، $SN = ٨٢٢٠$ ، $SO = ٨٢٤٠$ ، $SP = ٨٢٦٠$ ، $SN = ٨٢٨٠$ ، $SO = ٨٣٠٠$ ، $SP = ٨٣٢٠$ ، $SN = ٨٣٤٠$ ، $SO = ٨٣٦٠$ ، $SP = ٨٣٨٠$ ، $SN = ٨٤٠٠$ ، $SO = ٨٤٢٠$ ، $SP = ٨٤٤٠$ ، $SN = ٨٤٦٠$ ، $SO = ٨٤٨٠$ ، $SP = ٨٥٠٠$ ، $SN = ٨٥٢٠$ ، $SO = ٨٥٤٠$ ، $SP = ٨٥٦٠$ ، $SN = ٨٥٨٠$ ، $SO = ٨٦٠٠$ ، $SP = ٨٦٢٠$ ، $SN = ٨٦٤٠$ ، $SO = ٨٦٦٠$ ، $SP = ٨٦٨٠$ ، $SN = ٨٧٠٠$ ، $SO = ٨٧٢٠$ ، $SP = ٨٧٤٠$ ، $SN = ٨٧٦٠$ ، $SO = ٨٧٨٠$ ، $SP = ٨٨٠٠$ ، $SN = ٨٨٢٠$ ، $SO = ٨٨٤٠$ ، $SP = ٨٨٦٠$ ، $SN = ٨٨٨٠$ ، $SO = ٨٩٠٠$ ، $SP = ٨٩٢٠$ ، $SN = ٨٩٤٠$ ، $SO = ٨٩٦٠$ ، $SP = ٨٩٨٠$ ، $SN = ٩٠٠٠$ ، $SO = ٩٠٢٠$ ، $SP = ٩٠٤٠$ ، $SN = ٩٠٦٠$ ، $SO = ٩٠٨٠$ ، $SP = ٩١٠٠$ ، $SN = ٩١٢٠$ ، $SO = ٩١٤٠$ ، $SP = ٩١٦٠$ ، $SN = ٩١٨٠$ ، $SO = ٩٢٠٠$ ، $SP = ٩٢٢٠$ ، $SN = ٩٢٤٠$ ، $SO = ٩٢٦٠$ ، $SP = ٩٢٨٠$ ، $SN = ٩٣٠٠$ ، $SO = ٩٣٢٠$ ، $SP = ٩٣٤٠$ ، $SN = ٩٣٦٠$ ، $SO = ٩٣٨٠$ ، $SP = ٩٤٠٠$ ، $SN = ٩٤٢٠$ ، $SO = ٩٤٤٠$ ، $SP = ٩٤٦٠$ ، $SN = ٩٤٨٠$ ، $SO = ٩٥٠٠$ ، $SP = ٩٥٢٠$ ، $SN = ٩٥٤٠$ ، $SO = ٩٥٦٠$ ، $SP = ٩٥٨٠$ ، $SN = ٩٦٠٠$ ، $SO = ٩٦٢٠$ ، $SP = ٩٦٤٠$ ، $SN = ٩٦٦٠$ ، $SO = ٩٦٨٠$ ، $SP = ٩٧٠٠$ ، $SN = ٩٧٢٠$ ، $SO = ٩٧٤٠$ ، $SP = ٩٧٦٠$ ، $SN = ٩٧٨٠$ ، $SO = ٩٨٠٠$ ، $SP = ٩٨٢٠$ ، $SN = ٩٨٤٠$ ، $SO = ٩٨٦٠$ ، $SP = ٩٨٨٠$ ، $SN = ٩٩٠٠$ ، $SO = ٩٩٢٠$ ، $SP = ٩٩٤٠$ ، $SN = ٩٩٦٠$ ، $SO = ٩٩٨٠$ ، $SP = ١٠٠٠٠$ ، $SN = ١٠٠٢٠$ ، $SO = ١٠٠٤٠$ ، $SP = ١٠٠٦٠$ ، $SN = ١٠٠٨٠$ ، $SO = ١٠١٠٠$ ، $SP = ١٠١٢٠$ ، $SN = ١٠١٤٠$ ، $SO = ١٠١٦٠$ ، $SP = ١٠١٨٠$ ، $SN = ١٠٢٠٠$ ، $SO = ١٠٢٢٠$ ، $SP = ١٠٢٤٠$ ، $SN = ١٠٢٦٠$ ، $SO = ١٠٢٨٠$ ، $SP = ١٠٣٠٠$ ، $SN = ١٠٣٢٠$ ، $SO = ١٠٣٤٠$ ، $SP = ١٠٣٦٠$ ، $SN = ١٠٣٨٠$ ، $SO = ١٠٤٠٠$ ، $SP = ١٠٤٢٠$ ، $SN = ١٠٤٤٠$ ، $SO = ١٠٤٦٠$ ، $SP = ١٠٤٨٠$ ، $SN = ١٠٥٠٠$ ، $SO = ١٠٥٢٠$ ، $SP = ١٠٥٤٠$ ، $SN = ١٠٥٦٠$ ، $SO = ١٠٥٨٠$ ، $SP = ١٠٦٠٠$ ، $SN = ١٠٦٢٠$ ، $SO = ١٠٦٤٠$ ، $SP = ١٠٦٦٠$ ، $SN = ١٠٦٨٠$ ، $SO = ١٠٧٠٠$ ، $SP = ١٠٧٢٠$ ، $SN = ١٠٧٤٠$ ، $SO = ١٠٧٦٠$ ، $SP = ١٠٧٨٠$ ، $SN = ١٠٨٠٠$ ، $SO = ١٠٨٢٠$ ، $SP = ١٠٨٤٠$ ، $SN = ١٠٨٦٠$ ، $SO = ١٠٨٨٠$ ، $SP = ١٠٩٠٠$ ، $SN = ١٠٩٢٠$ ، $SO = ١٠٩٤٠$ ، $SP = ١٠٩٦٠$ ، $SN = ١٠٩٨٠$ ، $SO = ١١٠٠٠$ ، $SP = ١١٠٢٠$ ، $SN = ١١٠٤٠$ ، $SO = ١١٠٦٠$ ، $SP = ١١٠٨٠$ ، $SN = ١١١٠٠$ ، $SO = ١١١٢٠$ ، $SP = ١١١٤٠$ ، $SN = ١١١٦٠$ ، $SO = ١١١٨٠$ ، $SP = ١١٢٠٠$ ، $SN = ١١٢٢٠$ ، $SO = ١١٢٤٠$ ، $SP = ١١٢٦٠$ ، $SN = ١١٢٨٠$ ، $SO = ١١٣٠٠$ ، $SP = ١١٣٢٠$ ، $SN = ١١٣٤٠$ ، $SO = ١١٣٦٠$ ، $SP = ١١٣٨٠$ ، $SN = ١١٤٠٠$ ، $SO = ١١٤٢٠$ ، $SP = ١١٤٤٠$ ، $SN = ١١٤٦٠$ ، $SO = ١١٤٨٠$ ، $SP = ١١٥٠٠$ ، $SN = ١١٥٢٠$ ، $SO = ١١٥٤٠$ ، $SP = ١١٥٦٠$ ، $SN = ١١٥٨٠$ ، $SO = ١١٦٠٠$ ، $SP = ١١٦٢٠$ ، $SN = ١١٦٤٠$ ، $SO = ١١٦٦٠$ ، $SP = ١١٦٨٠$ ، $SN = ١١٧٠٠$ ، $SO = ١١٧٢٠$ ، $SP = ١١٧٤٠$ ، $SN = ١١٧٦٠$ ، $SO = ١١٧٨٠$ ، $SP = ١١٨٠٠$ ، $SN = ١١٨٢٠$ ، $SO = ١١٨٤٠$ ، $SP = ١١٨٦٠$ ، $SN = ١١٨٨٠$ ، $SO = ١١٩٠٠$ ، $SP = ١١٩٢٠$ ، $SN = ١١٩٤٠$ ، $SO = ١١٩٦٠$ ، $SP = ١١٩٨٠$ ، <

ثانياً: القاطع والمماس ومياسات الزوايا :-

تذكر أنه :-

① إذا تقاطع قاطعان داخل دائرة فإحدى قياسات زاويتي تقاطعها يساوي نصف مجموع قياس القوس المقابل لهذه الزاوية والقوس المقابل للزاوية التي تقاطعها بالرأس

في الشكل المقابل :-

$$\vec{P} \cap \vec{Q} = \vec{S} \cap \vec{R}$$

$$\text{فإنه } \angle (P, Q) = \frac{1}{2} [\angle (S, R) + \angle (P, Q)]$$

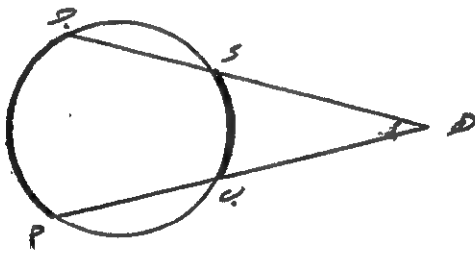
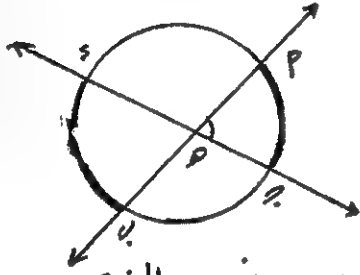
② إذا تقاطع قاطعان داخل دائرة فإحدى قياسات زاويتي تقاطعها يساوي نصف الفرق

الموجب بين قياس القوسين المقابلين له

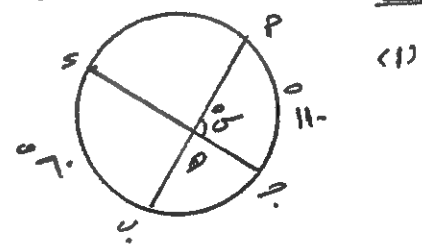
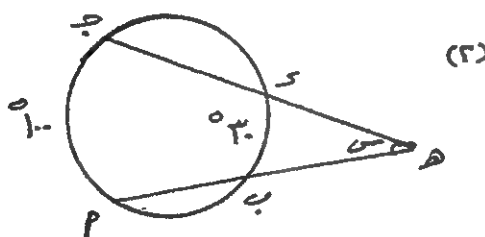
في الشكل المقابل :-

$$\vec{P} \cap \vec{Q} = \vec{S} \cap \vec{R}$$

$$\text{فإنه } \angle (P, Q) = \frac{1}{2} [\angle (S, R) - \angle (P, Q)]$$



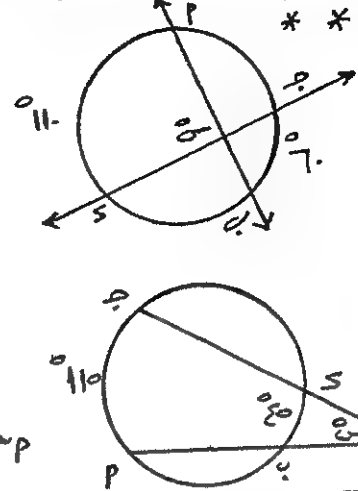
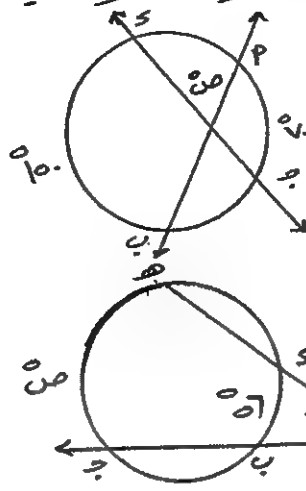
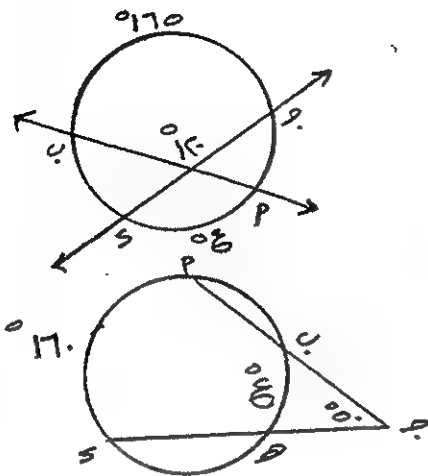
مثال ② :- في الأشكال الآتية . أوجد قيمة α :-



الحل :- (1) $\alpha = 170^\circ \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} [60^\circ + 110^\circ] = \frac{1}{2} [\angle (S, R) + \angle (P, Q)]$

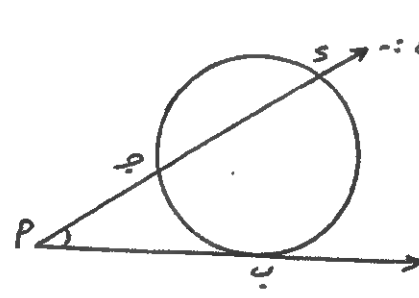
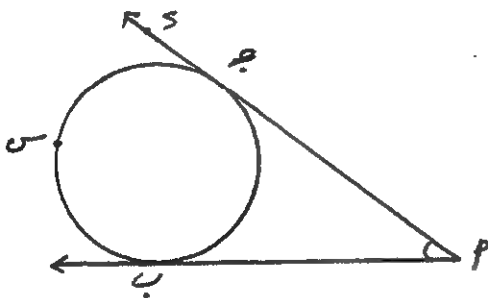
(2) $\alpha = 70^\circ \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} [30^\circ - 10^\circ] = \frac{1}{2} [\angle (S, R) - \angle (P, Q)]$

* تدريبيتي * في كل من الأشكال الآتية، أوجد قيمة الزوايا المستعمدة في القياس.



تمرين مشهور :-

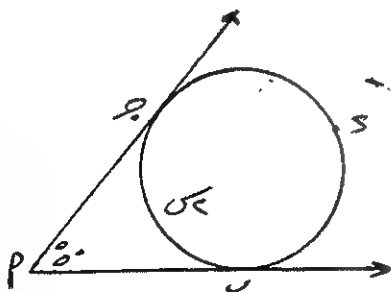
القاطع والمماس (أو المماس)، لدائرة المتقاطعة خارج الدائرة يكون قياس زاوية تقاطعها مساوياً لنصف القوس المواجه بين قياس القوسين المقابلين.



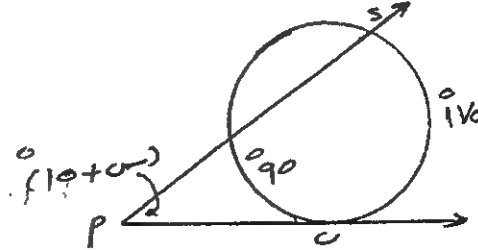
$$\angle P = \frac{1}{2} [\text{قوس } (بج) - \text{قوس } (أب)]$$

$$\angle P = \frac{1}{2} [\text{قوس } (بج) - \text{قوس } (أب)]$$

مثال ٦ :- في الأشكال الآتية أوجد قيمة س.



(٢)



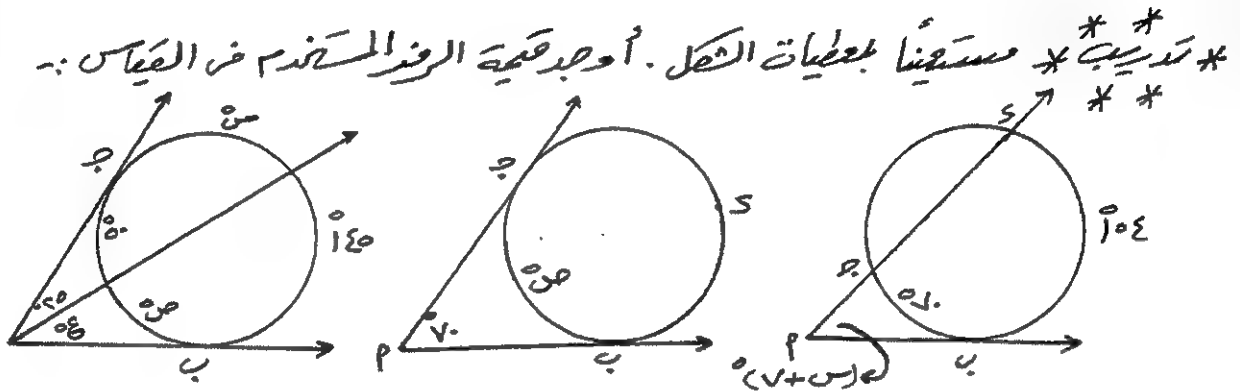
(١)

الحل :- (١) $\angle P = \frac{1}{2} [90 - 170] = \frac{1}{2} (-80) = -40$ (٢) $\angle P = \frac{1}{2} [100 - 80] = \frac{1}{2} (20) = 10$

$$(٢) \quad \frac{1}{2} = 0.5 \quad \Leftrightarrow \quad [٣٦٠ - (٣٦٠ - ٣٦)] \cdot \frac{1}{2} = 0.5$$

$$\frac{1}{2} = 0.5 \quad \Leftrightarrow \quad [٣٦٠ - ٣٦] \cdot \frac{1}{2} = 0.5$$

$$٣٦٠ - ٣٦ = ٣٢٤ \quad \Leftrightarrow \quad ٣٢٤ \cdot \frac{1}{2} = ١٦٢ \quad \Leftrightarrow \quad ٣٢٤ = ٢ \cdot ١٦٢$$



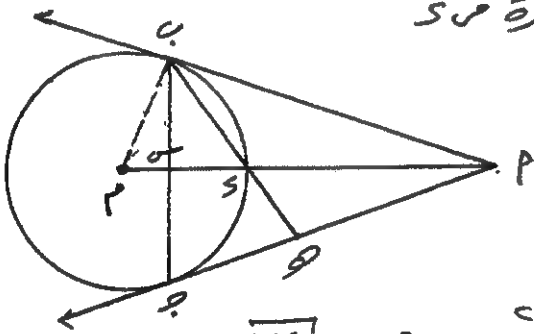
مثال ١ :- في الشكل المقابل :- دائرة طول نصف قطرها ٩ سم

نقطتي P و Q على سطح الدائرة عند B و C . MP يقطع الدائرة في S

AB و AC من P . رسم بياني يقطع AB في D

إذا كانه في (P) = ١٤٤ . أوجد :-

(١) طول AB ، (٢) طول PS



الحل :- \therefore في (P) = ١٤٤ \Leftrightarrow (AB) = ١٢ \Leftrightarrow AB = ١٢ = ١٢ = ١٢

نصل B بم نصف قطر . \therefore AB عماس \therefore AB \perp Bm

\therefore AB عماس \therefore AB \perp Bm

من P بم القائم في B \therefore (AB) + (BC) = (AC) \therefore (AB) + (BC) = (AC)

\therefore MP = ١٢ = ١٢ = ١٢

من P بم القائم في B \therefore Bm \perp PS \therefore (AB) = (BC) \therefore (AB) = (BC)

$$\Leftrightarrow (AB) = (BC) = ١٢ \quad \Leftrightarrow \quad ١٢ = \frac{١٤٤}{١٠} = ١٢ \quad \#$$

تمارين على "تطبيقات التناسب في الدائرة"

- ١٦ حدد موقع كل من النقط التالية بالنسبة إلى الدائرة م، والتي طول نصف قطرها ١٠ سم. حيث بعد كل نقطة عن مركز الدائرة.
- ١٧ و م (أ) = ٣٦ و م (ب) = ٩٦

١٨ أوجد قوة النقطة المعطاة بالنسبة إلى الدائرة م، والتي طول نصف قطرها م:

١ النقطة أ حيث $ام = ١٢$ سم ، $مو = ٩$ سم

٢ النقطة ب حيث $بم = ٨$ سم ، $بو = ١٥$ سم

٣ النقطة ج حيث $جم = ٧$ سم ، $جو = ٧$ سم

٤ النقطة د حيث $دم = ١٧$ سم ، $دو = ٤$ سم

١٩ إذا كان بعد نقطة عن مركز دائرة يساوي ٢٥ سم وقوة هذه النقطة بالنسبة إلى الدائرة تساوي ١٠ سم، أوجد طول نصف قطر هذه الدائرة.

٢٠ الدائرة م طول نصف قطرها ٢٠ سم. أ نقطة تبعد عن مركز الدائرة مسافة ١٦ سم، رسم الوتر ب ج حيث $ا ب ج د$ ، $ا ب = ٢$ جـ احسب طول الوتر ب جـ.

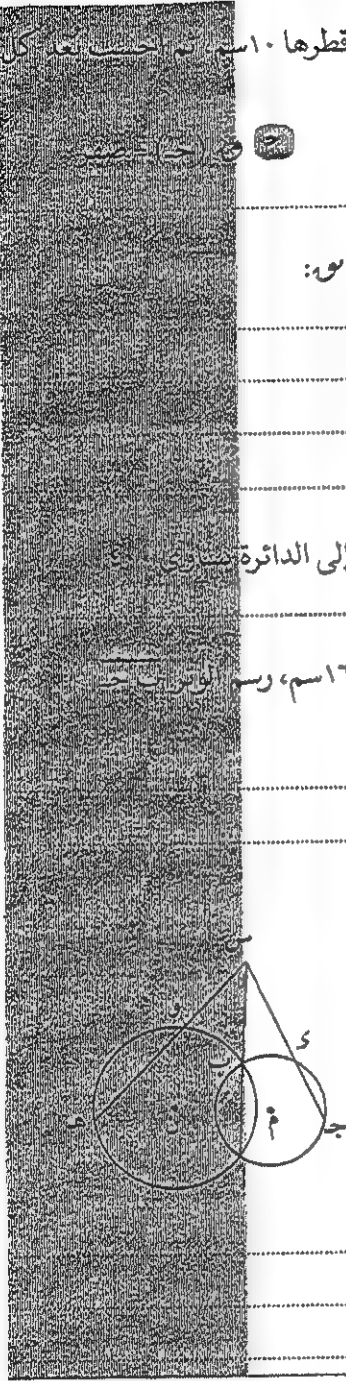
٢١ في الشكل المقابل: الدائرتان م، ن متقاطعتان في أ، ب

حيث $ا ب \cap ج د \cap ه و = {س}$ ، $س د = ٢$ جـ ، $ه و = ١٠$ سم، و ن (س) = ١٤٤.

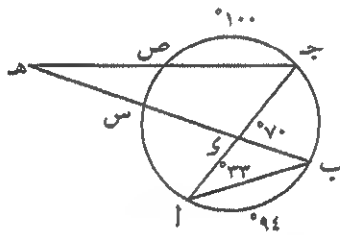
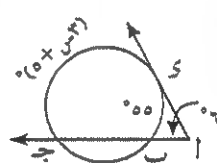
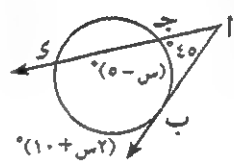
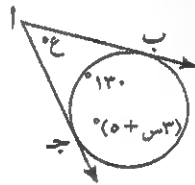
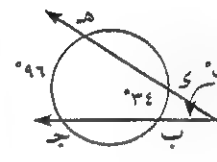
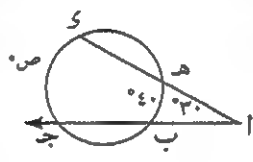
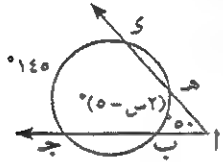
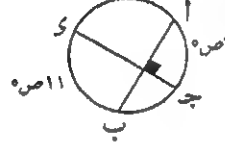
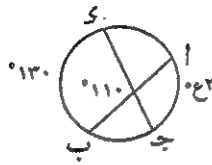
٢٢ أثبت أن $ا ب$ محور أساسى للدائرتين م، ن.

٢٣ أوجد طول كل من $س جـ$ ، $س و$

٢٤ أثبت أن الشكل ج د و ه رباعي دائري.



١٦ مستعينًا بمعطيات الشكل، أوجد قيمة الرمز المستخدم في القياس.

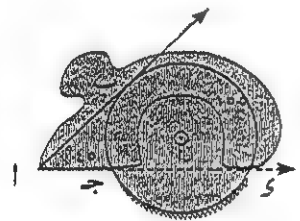


١٧ في الشكل المقابل: و $\angle AOB = 100^\circ$ ، و $\angle ADB = 70^\circ$ ، و $\angle AOC = 94^\circ$ ، و $\angle BOC = 100^\circ$ أوجد قياس كل من:

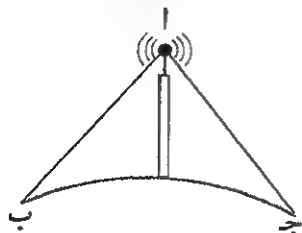
س ص

ا س

$\angle BHD$



١٨ السطح مع الصناعة: منشار دائري لقطع الخشب طول نصف قطر دائرته ١٠ سم. يدور داخل حافظة حماية، فإذا كان و $\angle AOB = 100^\circ$ أوجد طول قوس قرص المنشار خارج حافظة الحماية.



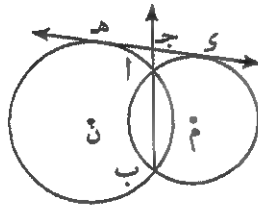
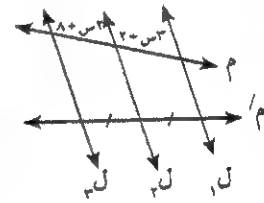
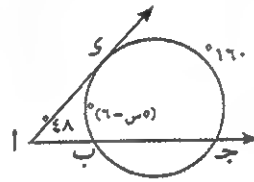
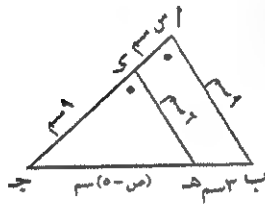
١٩ اتصالات: تتبع الإشارات التي تصدر عن برج الاتصالات في مسارها شعاعاً، نقطة بدايته على قمة البرج، ويكون مماساً لسطح الأرض، كما في الشكل المقابل. حدد قياس القوس المحصور بالماسين بفرض أن البرج يقع على مستوى سطح البحر، و $\angle AOB = 100^\circ$

تعاريف عامة

أكمل العبارات التالية:

- ١ المنصفان الداخلي والخارجي لزاوية واحدة
- ٢ منصفات زوايا المثلث تتقاطع في
- ٣ إذا رسم مستقيم يوازي أحد أضلاع مثلث، ويقطع الضلعين الآخرين فإنه
- ٤ المنصف الخارجي لزاوية رأس المثلث المتساوي الساقين قاعدة المثلث.
- ٥ إذا كانت قوة النقطة أ بالنسبة للدائرة م كمية سالبة، فإن نقطة اتقع

٦ مستعيناً بمعطيات الشكل، أوجد قيمة الرمز المستخدم في القياس.



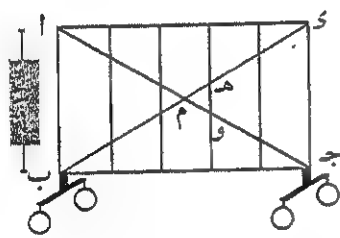
٧ دائرتان م، ن متقاطعتان في أ، ب.

هـ د مماس مشترك للدائرتين م، ن عند د، هـ على الترتيب،

$$\overline{AB} \cap \overline{DE} = \{ج\}$$

أثبت أن: ب جـ محور أساسي للدائرتين.

إذا كان أ ب = ٩ سم، و(ج) = ٣٦، أوجد طول جـ أ، جـ د

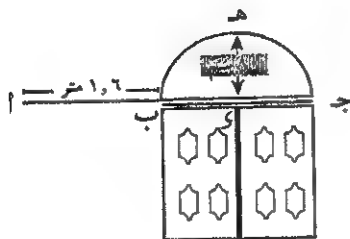


٨ يبين الشكل المقابل أحد الحواجز المرورية أ ب جـ د على شكل

مستطيل ومكون من متوازية ومتطابقة، وعلى أبعاد متساوية،

ومثبت به دعامتان أ جـ، ب د، تقطعان أحد القضبان الرأسية في

و، هـ على الترتيب فإذا كان أ ب = ١٢٠ سم أوجد طول هـ د.



٩ هندسة معمارية: من نقطة أ والتي تبعد ١,٦ مترًا عن قاعدة قنطرة

تعلو باب منزل، وجد أن قوة النقطة أ بالنسبة لدائرة قوس القنطرة

يساوي ٦,٤ متر مربع.

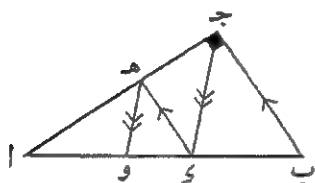
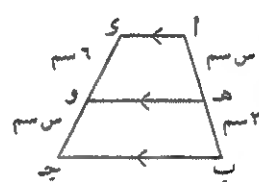
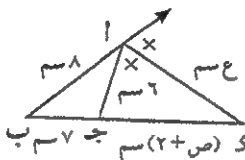
أوجد طول قاعدة القنطرة (ب جـ).

إذا كان ارتفاع القنطرة يساوي ٨٠ سم، فأوجد قوة النقطة د

بالنسبة لدائرة القنطرة وطول نصف قطرها.

اختبار الوحدة

١) مستخدماً معطيات الشكل، أوجد قيمة الرمز المستخدم في القياس.



٢) في الشكل المقابل: Δ أ ج ب قائمة، ب ج // د هـ

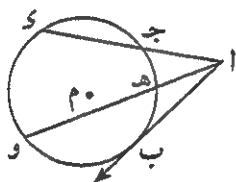
ج د // هـ و. أثبت أن:

$$او \times اب = ا هـ^2 + هـ د^2$$

٣) أ ب ج مثلث، ن نقطة داخل المثلث. نصفت الزوايا أ ن ب، ب ن ج، ج ن أ

بمنصفات لاقط أ ب، ب ج، ج أ في د، هـ، و على الترتيب.

$$اثبت أن: \frac{اي}{وب} \times \frac{ب هـ}{هـ ج} \times \frac{ج و}{وا} = 1$$



٤) ا نقطة خارج الدائرة م، أ ب مماس للدائرة عند ب.

رسم أ ج، أ هـ يقطعان الدائرة في ج، د، هـ، و على الترتيب،

$$اج = ٤سم، هـ و = ٩سم.$$

١) إذا كان م (ا) أوجد طول كل من أ ب، أ هـ، ج د

٢) إذا كانت س \in ج د حيث ج س = ٢سم أوجد م (س)، م (د).

٥) أ و متوسط في Δ ا ب ج، ج س ينصف أ ب ويقطع أ ب في س، د ص ينصف أ د ج و يقطع

أ ج في ص.

١) أثبت أن: س ص // ب ج

٢) إذا رسم د ع \perp س ص ويقطعه في ع، وكان س ع = ٩سم، ع ص = ١٦سم

أوجد طول كل من: د س، د ص.

اختبار تراكمي

أسئلة الاختيار من متعدد

١٠ إذا كان $\frac{3}{4} = \frac{9}{x}$ فإن x تساوي:

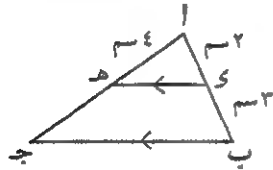
- ١٢ ☐ ١٦ ☐ ٢٧ ☐ ٨١ ☐

١١ جذرا المعادلة $x^2 + 2x - 20 = 0$ صفر هما:

- ١٠-٤٢ ☐ ٤-٥٥ ☐ ٥-٤٤ ☐ ٥-٤٤ ☐

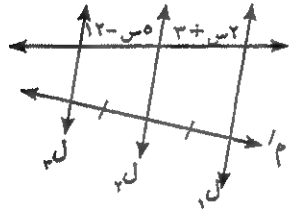
١٢ إذا كان $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ فإن $\angle A$ يساوي:

- ٣٠° ☐ ٦٠° ☐ ١٠٠° ☐ ١٢٠° ☐



١٣ إذا كان المستقيمان l ، m متوازيين، يقطعها المستقيمان n ، p والأطوال مقدرة بالستيمترات فإن x تساوي:

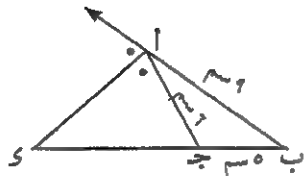
- ٣ ☐ ٥ ☐ ٢ ☐ ٧ ☐



١٤ في الشكل المقابل \overline{AO} ينصف الزاوية الخارجة

عند A فإن طول \overline{AO} يساوي:

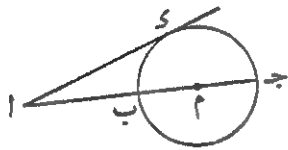
- ٥ سم ☐ ١٠ سم ☐ ١٢ سم ☐ ١٨ سم ☐



١٥ الدائرة m طول نصف قطرها ٥ سم، \overline{AO} مماس للدائرة عند S ،

$AS = 12$ سم فإن طول \overline{AO} يساوي:

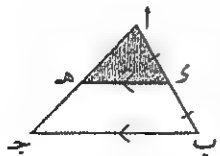
- ٧ سم ☐ ١٢ سم ☐ ١٥ سم ☐ ١٨ سم ☐



١٦ إذا كانت مساحة سطح $\triangle ABC = 16$ سم²

فإن مساحة سطح المثلث $ABD =$ _____ سم².

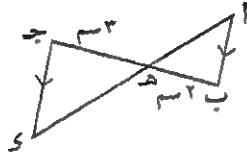
- ٣٢ ☐ ١٦ ☐ ١٢٨ ☐ ٦٤ ☐



اختبار تراكمي

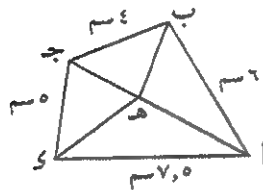
الأسئلة ذات الإجابات القصيرة:

٨. في الشكل المقابل:



$\overline{AB} \parallel \overline{DE}$ ، $\overline{BC} \parallel \overline{EF}$ ، $\overline{AC} = 10$ سم. أوجد طول \overline{DF} .

٩. في الشكل المقابل: \overline{AD} ينصف $\angle B$ ،



ويقطع \overline{AC} في \overline{AD} في $\overline{AB} = 6$ سم، $\overline{BD} = 5$ سم، $\overline{AD} = 4$ سم، $\overline{AC} = 7.5$ سم. أثبت أن \overline{AD} ينصف $\angle B$.

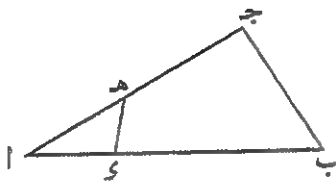
١٠. في الشكل المقابل:



\overline{AB} ، \overline{CD} وتران في الدائرة، $\overline{AB} \cap \overline{CD} = \{E\}$. أثبت أن $\triangle AEC \sim \triangle BED$.

التمارين ذات الإجابات الطويلة

١١. في الشكل المقابل: \overline{AB} جـ مثلث فيه $\overline{AB} = 2$ سم، $\overline{BC} = 12$ سم،



$\overline{AD} = 3$ سم، $\overline{BD} = 4$ سم، $\overline{DC} = 8$ سم، $\overline{AC} = 9$ سم، $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$ حيث $\overline{AD} = 3$ سم،

$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ حيث $\overline{AD} = 4$ سم.

أثبت أن $\triangle AEC \sim \triangle BED$.

ثم أوجد طول \overline{DE} .

١٢. \overline{AB} جـ مثلث، $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ، $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$ ، رسم \overline{DE} فقطع \overline{AB} في \overline{AD} ، وعلو الترتيب فإذا كان الشكل $\triangle ABC$ ورابعياً دائرياً أثبت أن $\frac{\overline{AD}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$.

مكتبة وسام

ش. شارع حسني مبارك - خلف الثانوية بنات
01004423597 - 3943035

أ / جميل غالي السيد

(١٧٨)

الفصل الدراسي الأول

اختبارات عامة

من الكتاب المدرسي علي

الجبر

وحساب المثلثات

والهندسة

اختبارات عامة

(الجبر وحساب المثلثات)

الاختبار الأول

أولاً: أكمل ما يأتى

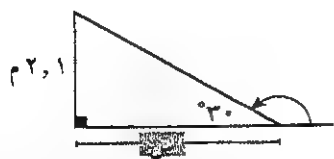
- ١) إذا كان $s = 1$ هي أحد جذرى المعادلة $s^2 - 1s - 2 = 0$ فإن $1 =$
- ٢) إشارة الدالة d حيث $d(s) = s^2 + 3$ تكون
- ٣) المعادلة التربيعية فى مجموعة الأعداد المركبة التى جذراها $-t, t$ هى
- ٤) مدى الدالة d حيث $d(\theta) = 3$ جا θ هو
- ٥) أصغر زاوية موجبة مكافئة للزاوية التى قياسها (-84°) قياسها وتقع فى الربع

ثانياً: أجب عن الأسئلة الآتية:

- ١) أثبت أن جذرى المعادلة $s^2 - 5s + 3 = 0$ حقيقيان مختلفان، ثم أوجد مجموعة الحل فى ح مقرباً الناتج لرقم عشرى واحد.
- ٢) أوجد فى أبسط صورة قيمة المقدار: جا (-30°) جتا 20° ظل 20° ظل 60°
 ٣) فى المعادلة $(5-1)s^2 + (10-1)s - 5 = 0$ أوجد قيمة 1 فى الحالات الآتية:
 أولاً: إذا كان مجموع جذرى المعادلة $= 4$
 ثانياً: إذا كان أحد جذرى المعادلة هو المعكوس الضربى للجذر الآخر.
 ٤) ابحث إشارة الدالة d حيث $d(s) = s^2 + 2s - 10$ مع توضيح ذلك على خط الأعداد.

- ٢) أوجد مجموعة حل المتباينة: $5s^2 + 12s \leq 44$
 ٣) إذا كان جا $\theta = \frac{2}{5}$ حيث $90^\circ > \theta > 180^\circ$ ، أوجد قيمة: جتا $(\theta - 270^\circ)$ ، ظل $(\theta + 180^\circ)$

- ٤) ضع العدد المركب الآتى فى أبسط صورة $(26 - 4t) - (9 - 20t)$ حيث $t^2 = 1$
 ٥) الربط بالرياضة: يركل لاعب كرة القدم الكرة نحو الهدف من مسافة s متراً عن حارس المرمى، فيقفز الحارس ويمسك الكرة على ارتفاع $2,1$ متراً عن سطح الأرض فإذا كان مسار الكرة يميل بزاوية قياسها 30° مع الأفقى. فأوجد لأقرب رقم عشرى واحد المسافة بين اللاعب وحارس المرمى عندما يركل اللاعب الكرة.



الاختبار الثاني

(الجبر وحساب المثلثات)

أولاً: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١) أبسط صورة للعدد التخيلي ٣٢ هو:
 أ) $١ - ٣٢$ ب) ٣٢ ج) -٣٢ د) ٣٢

٢) الدالة $د: [-٤, ٧]$ ← ح حيث $د(س) = ٦ - ٢س$ تكون إشارتها موجبة في الفترة:
 أ) $[-٤, ٣]$ ب) $[٣, ٧]$ ج) $[-٤, ٧]$ د) $[٣, ٧]$

٣) إذا كان جذرا المعادلة $٤س^٢ - ١٢س + ٩ = ٠$ متساويين فإن ج تساوى:
 أ) ٣ ب) ٤ ج) ٩ د) ١٦

٤) ظا $(\frac{\pi}{٣})$ تساوى:
 أ) ٣٦ ب) $\frac{١}{٣٦}$ ج) $\frac{١}{٣٦}$ د) ٣٦

٥) القياس الدائري لزاوية مركزية تحصر قوساً طوله $٢سم$ من دائرة طول قطرها $٤سم$ هو:
 أ) $(\frac{\pi}{٣})$ ب) $(\frac{\pi}{٢})$ ج) $(\frac{\pi}{٤})$ د) $(\frac{\pi}{٦})$

ثانياً: أجب عن الأسئلة الآتية:

١) بين نوع جذري المعادلة $س^٢ + ٩س + ٦ = ٠$ ، ثم أوجد مجموعة الحل.
 إذا كان: ٧ قتا ٢٥ حيث $\frac{\pi}{٣} > ١ > \pi$. فأوجد القيمة العددية للمقدار: $ظا(١ + \pi) - ظنا(١ - \frac{\pi}{٣})$

٢) أوجد قيمتي أ، ب الحقيقيتين اللتين تحققان المعادلة: $(١ - ب) - (٣ + ١) = ٩ - ٧ = ت$ حيث $ت = ١ - ٢$

٣) حول قياس كل من الزوايا المكتوبة بالدرجات إلى راديان والمكتوبة بالراديان إلى درجات
 أولاً: ٢١٥° ثانياً: $\frac{\pi}{٨}$

٤) ابحث إشارة الدالة د حيث $د(س) = ٢س^٢ - ٣س + ٤$ مع توضيح ذلك على خط الأعداد الحقيقية
 إذا كانت الزاوية θ مرسومة في الوضع القياسي، حيث يمر ضلعها النهائي بالنقطة $(٤, -٣)$
 فأوجد $جا\theta$ ، $ظنا\theta$.

٥) إذا كان $(س + ٢)^٢ + (س + ١) + (س - ٤) > ٠$
 أولاً: اكتب المتباينة التربيعية في أبسط صورة. ثانياً: أوجد مجموعة حل المتباينة.

٦) إذا كان $\frac{٢}{م}$ ، $\frac{٢}{ن}$ هما جذرا المعادلة $س^٢ - ٦س + ٤ = ٠$ فأوجد المعادلة التي جذراها $(ل + م)$ ، $ل م$.

(الجبر وحساب المثلثات)

الاختبار الثالث

أولاً: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

١) إذا كان أحد جذري المعادلة $أس^2 + ٢س + ٥ = ٠$ معكوساً ضريبياً للجذر الآخر فإن $أ$ تساوى:
 أ) ٥ ب) ٢ ج) ٢- د) ٠

٢) إشارة الدالة $د$ حيث $د(س) = ٢ - ٦س$ تكون موجبة إذا كانت:
 أ) $س < ٣$ ب) $س \leq ٣$ ج) $س > ٣$ د) $س \geq ٣$

٣) المعادلة التربيعية التي جذراها $١ + ت$ ، $١ - ت$ حيث $ت^2 = ١ - هـ$ هي:
 أ) $س^2 + ٢س + ٥ = ٠$ ب) $س^2 - ٢س + ٥ = ٠$ ج) $س^2 + ٢س - ٥ = ٠$ د) $س^2 - ٢س - ٥ = ٠$

٤) إذا كانت θ زاوية مرسومة في الوضع القياسي بحيث جتا $\theta < ٠$ ، في أى ربع يقع ضلع النهاية للزاوية θ :
 أ) الأول ب) الأول أو الثاني ج) الأول أو الثالث د) الأول أو الرابع

٥) إذا كانت ٢ جتا $أ = -٣٦$ فإن أقل زاوية موجبة تحقق هذه الدالة المثلثية هي:
 أ) ٤٥° ب) ١٣٥° ج) ٢٢٥° د) ٣١٥°

ثانياً: أجب عن الأسئلة الآتية:

١) إذا كان $ل$ ، $م$ جذري المعادلة $س(٢ + س + ٣) = ٥$ فأوجد المعادلة التي جذراها $ل + ١$ ، $م + ١$

٢) زاوية مركزية قياسها ٦٠° وتقابل قوساً طوله $\frac{\pi\sqrt{3}}{٣}$ سم، احسب طول نصف قطر دائرتها.....

٣) ضع العدد $\frac{٣-٢}{٢+٣}$ في صورة عدد مركب. حيث $ت^2 = ١ - ١$
 إذا كان ٤ جا $١ - ٣ = ٠$ أوجد ١ حيث $١ \in [٠, \frac{\pi}{٢}]$

٤) إذا كانت $د: ح \rightarrow ح$ حيث $د(س) = -س^2 + ٨س - ١٥$
 أولاً: ارسم منحنى الدالة في الفترة $[١, ٧]$ ثانياً: عين من الرسم إشارة هذه الدالة.

٥) إذا كان $س = ٣ + ٢ت$ ، $ص = \frac{٢-٤}{٢-١}$ فأوجد $س + ص$ في صورة عدد مركب.....

٦) أوجد مجموعة حل المتباينة $س^2 + ٣س - ٤ \geq ٠$

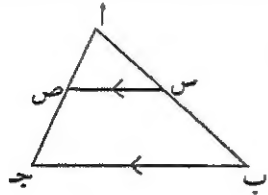
٧) إذا كان $\tan \alpha = \frac{٢}{٣}$ حيث $١٨٠^\circ < \alpha < ٢٧٠^\circ$ فأوجد قيمة: جتا $(٣٦٠^\circ - \alpha)$ - جتا $(٩٠^\circ - \alpha)$ (ب)

(الهندسة)

الاختبار الرابع

أولاً: أكمل

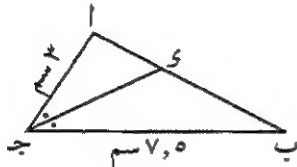
- ١) إذا قطع مستقيمان عدة مستقيمات متوازية، فإن أطوال القطع الناتجة على أحد القاطعين تكون
 ٢) النسبة بين مساحتي سطحي مثلثين متشابهين هي ٣ : ٥، إذا كانت مساحة سطح المثلث الأول ٣٦ سم^٢ فإن مساحة سطح المثلث الثاني تساوي



٣) في الشكل المقابل: إذا كان $\overline{AS} \parallel \overline{BC}$ ، $\overline{S} : \overline{AB} = ٣ : ٨$ فإن:

١) $\overline{AS} : \overline{SB} = \dots : \dots$

٢) محيط $\triangle AS$: محيط $\triangle ABC = \dots : \dots$

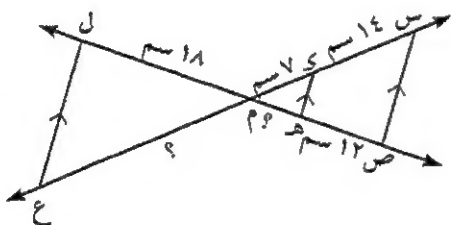


٤) في الشكل المقابل: إذا كان \overline{JD} ينصف $(\angle J)$ ،

أجـ = ٣ سم، بـ جـ = ٧,٥ سم، فإن $\overline{AJ} : \overline{JB} = \dots$

ثانياً: أجب عن الأسئلة الآتية

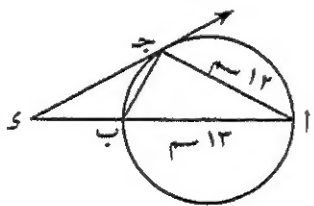
- ١) أوجد قوة النقطة أ بالنسبة إلى الدائرة م التي طول نصف قطرها ٣ سم، أم = ٤ سم.
 ٢) رسم مهندس معماري مخططاً لقطعة أرض مستطيلة الشكل، طولها ضعف عرضها، ومساحتها ٢٠٠ متر^٢ بمقياس رسم ١ : ٢٠٠، أوجد طول قطعة الأرض في المخطط.



٣) في الشكل المقابل: $\overline{AS} \parallel \overline{BC} \parallel \overline{DE}$ // $\overline{L} \parallel \overline{C}$ أوجد:

أولاً: طول \overline{AM}

ثانياً: طول \overline{MC}



٤) في الشكل المقابل: \overline{AB} قطر في الدائرة،

\overline{CD} مماس للدائرة عند جـ، أجـ = ١٢ سم، أب = ١٣ سم. أثبت أن:

١) $\triangle ACD \sim \triangle ABC$

٢) أوجد طول \overline{CD} لأقرب سم

٣) أوجد مساحة $\triangle ABC$

- ٥) أب جـ مثلث قائم الزاوية في أ، فيه أب = ٢٠ سم، أجـ = ١٥ سم، $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ بحيث كان بـ د = ١٠ سم،
 رسم $\overline{AH} \perp \overline{BC}$ ويقطع \overline{BC} في هـ، ومن د رسم $\overline{DO} \parallel \overline{AB}$ ويقطع \overline{AH} في و.
 أثبت أن \overline{DO} ينصف $\angle D$

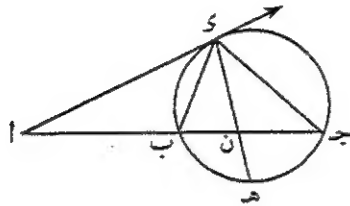
(الهندسة)

الاختبار الخامس

أولاً: أكمل:

١) النسبة بين مساحتي سطحي مثلثين متشابهين كالنسبة بين

٢) يتشابه المضلعان إذا كان ،



٣) في الشكل المقابل أكمل:

١) $(\text{أ})^2 = \dots$

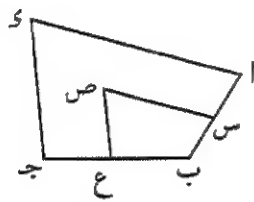
٢) $\text{ن} \times \text{هـ} = \dots$

٣) $\Delta \text{أ ب ج} \sim \Delta \dots$

ثانياً: أجب عن الأسئلة الآتية:

١) أوجد قوة النقطة ب بالنسبة إلى الدائرة م، التي طول نصف قطرها ٨ سم، ب م = ٥ سم

٢) في الشكل المقابل:



أولاً: إذا كان المضلع أ ب ج د ~ المضلع س ب ع ص
فأثبت أن: $\overline{\text{س ص}} \parallel \overline{\text{أ د}}$.

ثانياً: إذا كان محيط المضلع أ ب ج د = ١٤ سم،

محيط المضلع س ب ع ص = ١٠ سم،

طول $\overline{\text{س ب}} = ٢$ سم، فأوجد طول $\overline{\text{أ ب}}$

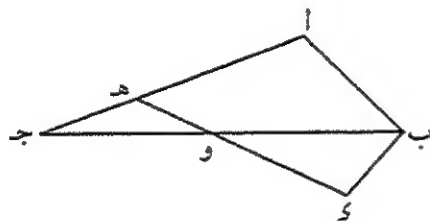
٣) في الشكل المقابل: أ ب = ٦ سم، ب ج = ١٢ سم،

ج د = ٨ سم، و ج هـ = ٢ سم، د ب = ٥ سم، د و = ٦ سم.

أثبت أن:

١) $\Delta \text{أ ب ج} \sim \Delta \text{د ب و}$

٢) $\Delta \text{هـ د و}$ متساوي الساقين.



٤) س ص ع مثلث، نصف زاوية ص بمنصف قطع $\overline{\text{ب ن}}$ في م، ثم رسم $\overline{\text{ن م}} \parallel \overline{\text{ص ع}}$ فقطع $\overline{\text{س ص}}$ في ن.

أثبت أن: $\frac{\text{س ص}}{\text{ص ع}} = \frac{\text{س ن}}{\text{ص ن}}$ ، وإذا كان س ص = ٦ سم، ص ع = ٤ سم، فأوجد طول س ن.

٥) أ ب ج د مثلث قائم الزاوية في أ. رسم $\overline{\text{أ و}} \perp \overline{\text{ب ج}}$ فقطعها في و.

رسم المثلثان المتساوي الأضلاع أ ب هـ، ج د و خارج المثلث أ ب ج

أثبت أن:

١) الشكل الرباعي أ ب هـ د ~ الشكل الرباعي ج د و أ.

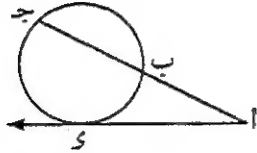
٢) $\frac{\text{مساحة سطح الشكل أ ب هـ د}}{\text{مساحة سطح الشكل ج د و أ}} = \dots$

(الهندسة)

الاختبار السادس

أولاً: أكمل:

- ١) إذا رُسم مستقيم يوازي أحد أضلاع مثلث، و يقطع الضلعين الآخرين فإنه
 ٢) في الشكل المقابل: إذا كان \overline{AI} مماس للدائرة عند I ، فإن:

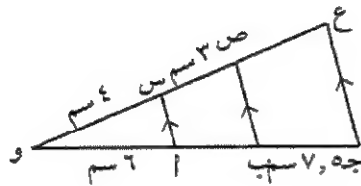


- أولاً: $AI \times AB = \dots$
 ثانياً: إذا كان $AI = 8$ سم، $AB = 2$ سم، فإن $AI = \dots$
 ثالثاً: إذا كان $AB = 3$ سم، $AI = 6$ سم، فإن $AI = \dots$

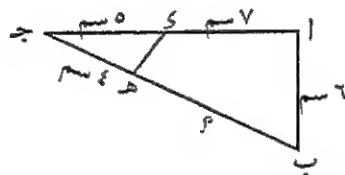
ثانياً: أجب عن الأسئلة الآتية:

- ١) إذا كانت النسبة بين مساحتي سطحي مضلعين متشابهين تساوي ١٦ : ٤٩، فما النسبة بين طولي ضلعين متناظرين فيهما؟ وما النسبة بين محيطيهما؟

- ٢) دائرتان متقاطعتان في A ، B رسم مماس مشترك يماسهما في S ، V .
 إذا كان $AB \cap \overline{SV} = \{J\}$ أثبت أن J منتصف \overline{SV} .

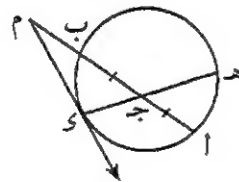


- ٣) في الشكل المقابل: $\overline{AS} \parallel \overline{BV} \parallel \overline{CE}$ ،
 و $A = 6$ سم، $BS = 4$ سم، $SV = 3$ سم،
 $B = 7$ سم، $SE = 5$ سم. أوجد طول كل من \overline{AB} ، \overline{AC}

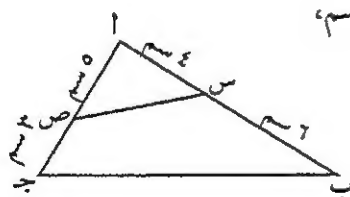


- ٤) في الشكل المقابل:
 $\triangle JDE \sim \triangle JCB$
 باستخدام الأطوال الموضحة على الرسم
 أوجد طول كل من \overline{JB} ، \overline{JD} .

- ٥) أوجد قوة النقطة J بالنسبة إلى الدائرة M التي طول نصف قطرها ٦ سم، $JM = 6$ سم



- ٦) في الشكل المقابل: $\overline{AB} \cap \overline{JD} = \{J\}$ ،
 $J = 1$ سم، $JB = 2$ سم، $JH = 8$ سم،
 M مماسة للدائرة. $M = \frac{1}{4} AB$. أوجد طول \overline{JM} .



- ٧) في الشكل المقابل: AB \parallel CD ، فيه $S \in \overline{AB}$ بحيث $AS = 4$ سم،
 $SB = 6$ سم، $S \in \overline{CD}$ بحيث $CS = 5$ سم، $SD = 3$ سم.
 أثبت أن: $\triangle ASV \sim \triangle CDS$
 الشكل S B J S رباعي دائري.
 إذا كانت M ($\triangle ASV$) $= 8$ سم². أوجد مساحة سطح المضلع S B J S .

مكتبة وسيد
 شربون، شارع حسني مبارك، خلف الثانوية بساتين
 01004423597.3943035